

N° d'Ordre : 6 (1971)

Référence C.N.R.S. : A.O. 6416

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

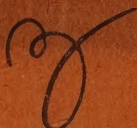
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Ahmed ABDALLAH

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



REGULATION QUADRATIQUE OPTIMALE

Soutenue le 13 décembre 1971 devant la Commission d'Examen

MM. R. MEZENCEV Président

J. LAMEAU

Y. THOMAS

Ph. de LARMINAT } Examinateurs

SAHUT d'IZARN

P.A.N. BRIGGS

N° d'Ordre : 6 (1971)

Référence C.N.R.S. : A.O.6416

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Ahmed ABDALLAH

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE

REGULATION QUADRATIQUE OPTIMALE

Soutenue le 13 décembre 1971 devant la Commission d'Examen

MM. R. MEZENCEV Président

J. LAMEAU
Y. THOMAS
Ph. de LARMINAT
SAHUT d'IZARN
P.A.N. BRIGGS

} Examineurs

THESE

INSTITUT DES SCIENCES DE NANTES

DEPT. DES SCIENCES

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Ahmed ABDALLAH

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECHANIQUE



REGISTRATION CHARGES DE BREVET

Le 15 Mars 1911, le jury de l'Examen a rendu son verdict

M. R. WEISSEY, Président

J. LAMBA

J. THOMAS

Dr. J. LAPOINTE, Examinateur

YAHUT WILSON

P. A. R. BRIDGE

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. PETRESCO Mathématiques

• • • • •

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. MOLINARO	"
	M. PAUC	"
	M. PETRESCO	"
	M. RAFFIN	"
	M. VIVIER (E.N.S.M.)	"
	M. TARDY (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. RAVILLY (E.N.S.M.)	"
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLOUD	"
	M. COLLET	"
	M. MINN	"
	M. MEZENECV (E.N.S.M.)	"
	M. MOUTON	"
	M. DUNOYER	Chimie
	M. GRAFF	"
	M. PIERI	"
	M. QUINIOU	"
	M. WOJTKOWIAK	"
	Melle DEBRAUX	Biologie
	M. GARRIGUES	"
	Mme LE DOUARIN	"
	M. LE DOUARIN	"
	M. SELLIER	"
	M. CAVET	Sciences de la Terre

Professeurs sans chaire**M. MEYER****Mathématiques****M. BARDON****Physique****M. GOUREAUX**

"

M. LASKAR

"

Mlle OFFRET (E.N.S.M.)

"

M. GOBIN (E.N.S.M.)**Chimie****M. MARTIN**

"

M. ROUXEL

"

M. TOURNOUX

"

M. DUPONT**Biologie****M. SAU DRAY**

"

M. OTTMANN**Sciences de la Terre****Maîtres de Conférences****M. FOUQUES****Mathématiques****M. IBISCH**

"

M. LAMEAU (E.N.S.M.)

"

M. LEBORGNE

"

M. GUEVEL (E.N.S.M.)**Mécanique****M. SULMONT (E.N.S.M.)**

"

M. VILAINE (E.N.S.M.)

"

M. CAILLER (I.U.T.)**Physique****M. COTTU (I.U.T.)**

"

M. LE BIHAN

"

M. LE CORRE (I.U.T.)

"

M. LONCKE

"

M. ROSIER

"

M. BOUCHY (I.U.T.)**Chimie****M. CHABANNEL**

"

Mme MARTIN

"

M. POINTEAU (E.N.S.M.)

"

M. AMOURIQ**Biologie****M. LEBRUN**

"

Mme NICOLAS-PRATT

"

M. FORESTIER**Sciences de la Terre****M. NICOLAS**

"

Secrétaire Général : M. LERAY

AVANT-PROPOS

Le travail qui va être exposé a été effectué au laboratoire d'Enzymologie de l'E.N.S.M., dirigé par Monsieur le Professeur R. MICHARD. Le directeur de ces travaux n'a cessé de me encourager et de m'encourager à l'accomplissement de ce travail, et je ne saurais oublier tout ce que je dois à son enseignement et à sa confiance. Je tiens à lui en exprimer toute ma reconnaissance et mon respect.

Monsieur J. LAFAY, Maître de Conférences à l'E.N.S.M., a attiré mon attention lors de ma première année de recherches. Aujourd'hui, il me fait l'honneur de participer à mon Jury. Je lui en suis très reconnaissant.

Monsieur Y. THOMAS, Chargé d'Enseignement à l'E.N.S.M., a été mon professeur personnel pendant ma formation. Sa bienveillante attention et ses conseils ont été pour moi une aide très précieuse. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance.

Je remercie chaleureusement Monsieur Ph. DE LAMBERT, Chargé de Recherches au C.N.R.S., qui a accepté de lui-même de me prodiguer ses conseils.

Je remercie vivement Monsieur SAUT D'IZARD, Président Directeur Général de la C.E.N.C.I., qui a accepté de signer ce travail.

Les remerciements les plus vifs vont également à Monsieur F.A.S. BRILL pour les facilités qu'il a bien voulu m'accorder lors de mon stage à l'Institut Spring Laboratory, Strasbourg.

J'adresse mes remerciements à l'équipe du Centre de Calcul pour son accueil et sa courtoisie, ainsi qu'à Monsieur M. BARRI, S. BELLAVOIE, A. BERTSCHER et J. KUGET, dont l'assistance technique a été pour moi d'une grande aide.

Il m'est agréable, enfin, de me souvenir ici de mes collègues étudiants et enseignants, et de les remercier pour leur excellente collaboration.

à Martine

AVANT-PROPOS

Le travail qui va être exposé a été effectué au Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M., dirigé par Monsieur le Professeur R. MEZENCEV. La chaleur de son accueil m'a toujours procuré le réconfort nécessaire à l'accomplissement de ma tâche, et je ne saurais oublier tout ce que je dois à son enseignement dans les domaines les plus divers. Je le prie de bien vouloir trouver ici l'expression de ma très profonde gratitude.

Monsieur J. LAMEAU, Maître de Conférences à l'E.N.S.M., m'a accordé son attention lors de ma première année de recherches. Aujourd'hui, il me fait l'honneur de participer à mon Jury, je lui en suis très reconnaissant.

Monsieur Y. THOMAS, Chargé d'Enseignement à l'I.U.T., s'est vu personnellement confié ma formation. Sa bienveillante attention et ses nombreux conseils ont constitué pour moi une aide très précieuse. Je tiens à lui exprimer tout particulièrement ma reconnaissance.

Je remercie chaleureusement Monsieur Ph. De LARMINAT, Chargé de Recherches au C.N.R.S., qui a accepté à tout moment de me prodiguer ses conseils.

Je remercie vivement Monsieur SAHUT D'IZARN, Président Directeur Général de la C.E.R.C.I., qui a accepté de juger ce travail.

Mes remerciements les plus vifs vont également à Monsieur P.A.N. BRIGGS pour les facilités qu'il a bien voulu m'accorder lors de mon stage à Warren Spring Laboratory, Stevenage.

J'adresse mes remerciements à l'équipe du Centre de Calcul pour son aide souriante, ainsi qu'à Messieurs M. BARRE, S. BELLAVOIR, A. BERTHONNEAU et G. ROUGET, dont l'assistance technique a été sans défaut.

Il m'est agréable, enfin, de me souvenir ici de mes collègues chercheurs et enseignants, et de les remercier tous pour leur excellente camaraderie.

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION -	1
Première Partie - OPTIMALISEUR -	7
Chapitre 1 - CALCUL DES ELEMENTS DE L'OPTIMALISEUR, EN VUE D'UNE REGULATION ANALOGIQUE, PAR UNE METHODE RECURRENTTE -	9
I - INTRODUCTION	9
II - METHODE UTILISEE	9
1 - Calcul de la commande	10
2 - $p(t)$ est une fonction linéaire de $x(t)$	10
3 - Relations de récurrence	12
4 - Calcul des $\phi_{ij}(t_2, t_1)$ et $H_i(t_2, t_1)$	13
5 - Application au cas d'un horizon fuyant	14
III - CONCLUSION	15
IV - PROGRAMME REALISE	16
1 - Description de la méthode	16
2 - Description du programme	17
BIBLIOGRAPHIE -	18
Chapitre 2 - CALCUL DES ELEMENTS DE L'OPTIMALISEUR EN VUE D'UNE REGULATION NUMERIQUE -	19
I - INTRODUCTION	19
II - EQUATIONS DISCRETES DE L'ENSEMBLE BLOQUEUR - PROCESSUS - ECHANTILLONNEUR -	19
III - ETABLISSEMENT DES EQUATIONS RECURRENTES DE COMMANDE -	21
1 - Position du problème	21
2 - Résolution	21
IV - CONCLUSION	24
V - PROGRAMME REALISE	25
A - Equations discrètes de l'ensemble bloqueur - processus - échantillonneur	25

1 - Principe du programme	25
2 - Description du programme	25
B - Résolution des équations récurrentes de commande	26
1 - Description de la méthode	26
2 - Description du programme	26
Annexe - CALCUL DE L'OPTIMALISEUR GRACE A LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE -	27
1 - Position du problème	27
2 - Résolution	27
BIBLIOGRAPHIE -	30
Deuxième Partie - RECONSTRUCTEUR -	31
Chapitre 1 - PSEUDO-INVERSE -	33
I - INTRODUCTION	33
II - METHODE UTILISEE	34
1 - $m < n$ (plus d'inconnues que de mesures)	34
2 - $m > n$ (plus de mesures que d'inconnues)	35
III - CONCLUSION	36
IV - PROGRAMME REALISE	38
1 - Description de la méthode	38
2 - Caractéristiques du programme	38
V - EXPERIMENTATION	38
BIBLIOGRAPHIE -	42
Chapitre 2 - FILTRE DE KALMAN -	43
I - INTRODUCTION	43
II - FILTRE DE KALMAN DISCRET	44
1 - Récurrence entre les grandeurs * (Filtre prédicteur)	45
2 - Récurrence entre les grandeurs ^ (Filtre estimateur)	46
3 - Préférence de l'une ou l'autre relation	47
III - FILTRE DE KALMAN CONTINU	48
IV - CONCLUSION	49

V - PROGRAMMES REALISES	50
A - Calcul du gain du filtre	50
1 - Description de la méthode	50
2 - Description du programme	50
3 - Caractéristiques du programme	51
B - Estimation en ligne du vecteur d'état	51
1 - Description de la méthode	51
2 - Description du sous-programme	51
IV - ESSAIS EN SIMULATION	52
A - Equations	52
1 - Continues	52
2 - Discrètes	52
B - Matrice de gain calculée hors ligne	53
C - Estimation du vecteur d'état	53
Annexe -	57
BIBLIOGRAPHIE -	59
Chapitre 3 - ESTIMATION DES VARIANCES -	61
I - INTRODUCTION	61
II - METHODE	61
III - CONCLUSION	65
IV - PROGRAMMES REALISES	67
1 - Principe des programmes	67
2 - Caractéristiques des programmes	67
V - EXPERIMENTATION	67
BIBLIOGRAPHIE -	70
Chapitre 4 - OBSERVATEURS DE LUENBERGER -	71
I - INTRODUCTION	71
II - DESCRIPTION DE LA METHODE	72
A - Reconstitution d'une combinaison linéaire des composantes du vecteur d'état	72
B - Régularité de la transformation $x \Rightarrow z$	74
1 - Observateur d'ordre n	74
2 - Observateur d'ordre n-1	75
3 - Méthode permettant de construire une matrice M régulière	76
4 - Extension au cas multi-sorties	
Observateur d'ordre n-m	77

5 - Conditions imposées à la matrice B pour que l'observateur soit stable	79
C - Stabilité de l'ensemble processus - observateur en boucle fermée	81
III - CONCLUSION	84
V - PROGRAMME REALISE	86
1 - Principe et algorithmes	86
2 - Fonctionnement du programme	91
VI - SIMULATION	91
BIBLIOGRAPHIE -	95
 Troisième Partie - APPLICATION AU PROCESSUS PILOTE -	 97
 Chapitre 1 - DESCRIPTION DU PROCESSUS - POSITION DU PROBLEME -	 99
I - INTRODUCTION	99
1 - Généralités sur le fonctionnement des centrales thermiques	99
2 - Description du processus pilote	102
3 - Description du matériel électronique pouvant être connecté au processus pilote	104
4 - Identification du processus pilote	105
5 - Equations de la chaîne de pression et de température	107
6 - Forme des perturbations	107
7 - Choix du critère de régulation	108
 Chapitre 2 - REGULATION ANALOGIQUE -	 109
A - ESSAIS SUR PROCESSUS - MODELE A SIX ETATS	109
1 - Position du problème	109
2 - Optimaliseur	111
3 - Reconstructeur	111
4 - Equations calibrées de l'ensemble estimateur - optimaliseur	112
5 - Résultats expérimentaux	114
B - ESSAIS EN SIMULATION - MODELE A 7 ETATS	114
1 - Position du problème	114
2 - Optimaliseur	116
3 - Estimateur	116

4 - Equations calibrées du processus, de l'estimateur, de l'optimaliseur	117
5 - Résultats expérimentaux	117
Chapitre 3 - REGULATION NUMERIQUE -	121
A - ESSAIS EN SIMULATION - MODELE A 7 ETATS	121
1 - Position du problème	121
2 - Optimaliseur	123
3 - Reconstructeur	124
4 - Réalisation pratique (simulation)	125
5 - Résultats expérimentaux	126
B - ESSAIS SUR PROCESSUS - MODELE A 7 ETATS	131
BIBLIOGRAPHIE -	135
Annexes à la 3ème partie - SCHEMAS -	137
Symboles utilisés	139
Annexe 1 - SCHEMA REGULATION CONTINUE (PROCESSUS) -	141
Annexe 1 bis - SCHEMA REGULATION CONTINUE (SIMULATION) -	145
Annexe 2 - REGULATION DISCRETE - SIMULATION -	151
Annexe 3 - CONVERSION DES MESURES CHAUDIERE EN GRANDEURS ANALOGIQUES -	155
Annexe 4 - REGULATION NUMERIQUE SUR PROCESSUS -	159
CONCLUSION -	163

INTRODUCTION

La théorie classique des asservissements et de la régulation, développée dans le domaine fréquentiel (transformation de Laplace et de Fourier), ne permet pas un traitement aisé des processus multivariables (à plusieurs entrées et plusieurs sorties). En revanche, les théories de l'espace d'état - où les systèmes sont décrits selon un concept vectoriel - sont développées indépendamment du nombre de variables de commande et de sortie.

Parmi les méthodes de l'espace d'état, la plus attrayante - parce que la plus simple et la plus proche des principes de régulations analogiques les plus élaborées - est l'optimisation quadratique des systèmes linéaires (ou linéarisés). Le vecteur de commande est notamment élaboré par une combinaison linéaire des variables d'état : on retrouve ainsi les structures bouclées munies de tendances et de termes d'anticipation.

Si la théorie de l'optimisation quadratique est bien connue, il n'en reste pas moins que le succès de son application est lié au choix judicieux de certains paramètres et aux méthodes mathématiques de résolutions utilisées.

Il faut, en effet, se fixer certaines grandeurs, c'est-à-dire :

- la période d'optimisation, ou plus exactement le type d'horizon (fixé, infini, fuyant)
- les variables intervenant dans ce critère ; celles-ci sont généralement les variables d'état et de commande apparaissant naturellement dans les équations du processus. Mais on peut aussi introduire "artificiellement" des variables supplémentaires, afin d'améliorer certains comportements.
- les coefficients de ces mêmes variables ont une influence prépondérante sur les dynamiques du processus, et doivent être choisis en fonction des performances désirées.

Le Critère :

- Le critère à horizon fuyant $[(t, t+T), t \text{ étant le temps courant}]$ a retenu notre attention car il correspond bien au désir de réaliser une régulation multivariable à caractère industriel. En effet, la régulation se réduit à un bouclage constant sur les états, et à un terme d'anticipation. De plus, la prédiction de l'évolution des perturbations est corrigée à tout instant en fonctions

de nouvelles informations dues aux mesures.

En particulier, si les perturbations varient lentement devant la période d'optimisation choisie, et sont supposées constantes pendant la période T , les valeurs de ces constantes sont remises à jour à chaque instant.

- L'un des désirs de l'utilisateur est d'éviter un vieillissement prématuré du processus, et le remplacement trop fréquent des organes réglants. Dans ce but, nous introduirons dans le critère les vitesses des organes réglants. Autrement dit, le vecteur de commande n'est pas constitué par des débits ou des énergies, mais par leurs dérivées par rapport au temps. Mathématiquement, ceci implique qu'aux équations d'état habituelles sont adjoints des intégrateurs en nombre égal à la dimension des vecteurs de commande.

Corrélativement, cette manière de poser le problème supprime le statisme du système bouclé, du moins sur le plan théorique, c'est-à-dire si les équations d'état ne sont pas erronées. Sur le plan pratique, il apparaît un statisme que nous corrigerons en tenant compte des erreurs de modèle calculées à l'aide du reconstituteur d'état.

- La matrice de pondération des écarts est choisie diagonale, et de termes proportionnels aux carrés des erreurs admissibles. De même, la matrice de pondération des vitesses des organes réglants est choisie diagonale et de termes proportionnels aux vitesses admissibles. Le rapport entre la première matrice et la deuxième détermine le temps de réponse du système.

Le critère étant ainsi complètement défini, la solution théorique du problème est bien connue. Toutefois, l'application pratique présente certaines difficultés que nous nous sommes efforcés d'aplanir.

En effet, le calcul de la commande optimale par une théorie variationnelle conduit à deux constatations :

- les coefficients intervenant dans l'expression de la commande sont eux-mêmes solutions de systèmes d'équations différentielles ou récurrentes.

- la commande s'exprime linéairement en fonction de toutes les composantes du vecteur d'état.

La première remarque conduit à penser qu'il peut exister des méthodes plus performantes que d'autres pour résoudre ces équations différentielles, et ainsi trouver les coefficients de l'optimiseur.

Dans le cas usuel où l'on n'a pas accès à la mesure de tous les états, la deuxième remarque rend obligatoire la mise en oeuvre d'un système nous permettant de reconstituer le vecteur d'état. Là encore, certains reconstituteurs seront mieux adaptés que d'autres aux besoins de l'utilisateur.

Nous allons développer successivement les deux aspects "optimaliseur" et "reconstructeur".

OPTIMALISEUR :

Dans le cas d'un critère en temps fixé $[t_0, t_0+T]$ la matrice de bouclage est solution d'équations différentielles de RICCATI dont on connaît les valeurs finales (pour $t = t_0+T$). Ces équations sont indépendantes de l'état et de la consigne. D'autre part, le vecteur d'anticipation est solution d'un système d'équations différentielles linéaires, dépendant de la consigne, dont on connaît aussi les valeurs finales.

L'intégration à rebours de ces deux systèmes d'équations permet de calculer les valeurs des solutions à l'instant t_0 .

En particulier, dans le cas où T est au moins de l'ordre de grandeur du temps de réponse du processus stationnaire en boucle ouverte, la solution des équations de RICCATI tend vers un régime permanent et le vecteur d'anticipation s'exprime linéairement en fonction du vecteur de consigne, si celui-ci est supposé constant pendant la période T . Si, maintenant, t_0 représente le temps courant t (horizon fuyant) nous donnerons à chaque instant à la matrice de bouclage la valeur constante prise en t_0 par la solution de l'équation de RICCATI précédemment calculée, et au vecteur d'anticipation la valeur prise en fonction de la consigne au temps t .

Ces divers systèmes d'équations différentielles sont calculés hors ligne. Mais ils nécessitent toutefois l'utilisation d'ordinateurs de moyenne capacité, du fait de l'emploi de sous programmes d'intégrations. Afin de pouvoir utiliser des ordinateurs de petite capacité, nous avons exploité une méthode réalisant une intégration analytique préalable, conduisant à des équations récurrentes.

RECONSTRUCTEUR :

Comme toutes les méthodes de l'espace d'état, l'optimisation quadratique exige la connaissance du vecteur d'état et nécessite la mise en oeuvre d'un "reconstructeur d'états" dans le cas général où les mesures ne portent pas directement sur le vecteur d'état. Ce reconstructeur étant inclus dans la boucle de commande peut modifier la stabilité du système. Nous avons envisagé différents types de reconstructeurs :

Le plus simple d'emploi est un reconstructeur statique qui calcule algébriquement le vecteur d'état en fonction du vecteur de mesures. Cette méthode doit être utilisée avec circonspection, puisque la commande est alors une simple

combinaison algébrique des sorties, et l'on sait qu'un tel bouclage est incapable de stabiliser certains systèmes.

Au lieu de reconstituer l'état à partir de l'effet qu'il produit (les sorties), il est possible d'en utiliser les causes, c'est-à-dire les commandes et les perturbations.

En effet, l'emploi d'un modèle en parallèle avec le processus permet d'adopter comme valeurs de l'état celles qu'on peut observer sur le modèle (sous des conditions d'observabilité et de stabilité des équations du modèle). Pratiquement, ce type de restructeur s'avère suffisant si le modèle inspire la confiance, qui, dans la méthode précédente, était accordée aux mesures. Il est maintenant évident qu'une synthèse des deux procédés, un compromis utilisant les causes et les effets, fournira une méthode très améliorée dans l'esprit de l'automatique.

Dans cet esprit, on peut distinguer une théorie statistique (KALMAN) et une théorie déterministe (LUENBERGER).

1) La structure de restructeur de KALMAN comprend d'une part un modèle piloté par les commandes et les perturbations mesurables du processus, d'autre part, un terme correctif proportionnel à l'écart entre la sortie du modèle et celle du processus.

Cette théorie statistique de KALMAN fixe les pôles du restructeur et la valeur du terme correctif en fonction des caractéristiques statistiques des bruits de mesures et d'équations.

Ce restructeur est optimal au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qu'il minimise la somme des variances des composantes de l'écart entre le vecteur d'état réel et le vecteur d'état reconstruit.

D'autre part, la mise en cascade de l'optimaliseur et du restructeur de KALMAN constitue un optimum (principe de séparation) au sens de la minimisation de l'espérance mathématique du critère défini précédemment. Malheureusement, des difficultés apparaissent quand il s'agit de quantifier les caractéristiques statistiques des bruits. En effet, s'il est encore relativement aisé d'apprécier les caractéristiques des bruits de mesures, il en va tout autrement pour ceux des équations d'état.

Une solution, mise au point au Laboratoire d'Automatique de Nantes, s'offre alors :

A l'aide d'un algorithme de filtrage non linéaire (reposant lui-même sur la théorie de KALMAN), on reconstruit à la fois le vecteur d'état et les bruits, ce qui fournit les caractéristiques cherchées.

2) La structure du reconstituteur de LUENBERGER comprend d'une part, les équations de mesures et, d'autre part, un système analogique piloté par les commandes, les perturbations mesurables, et les sorties du processus. Ce système analogique reconstitue un nombre suffisant de combinaisons linéaires de l'état afin de constituer avec les équations de mesures un système régulier d'équations algébriques linéaires, dont la solution est le vecteur d'état.

Grâce à la théorie déterministe des "observateurs", on peut fixer arbitrairement les pôles du système analogique, dans les limites de respect de certaines conditions, dont le temps de réponse de ce reconstituteur.

D'autre part, la mise en cascade de l'optimaliseur et de l'observateur donne en définitive un système dont les pôles sont constitués par l'union des pôles du processus bouclé sur l'optimaliseur (en supposant tous les états accessibles) et de ceux de l'observateur.

LUENBERGER n'ayant pas explicité de méthodes générales de calcul d'un observateur, nous nous sommes inspirés de ses théories afin de mettre au point quelques algorithmes conduisant à la réalisation d'un observateur.

Correction des erreurs de modèle :

Lors de la réalisation pratique d'une optimisation quadratique sur un processus, on constate souvent un statisme dû à l'écart entre les paramètres ou la structure des équations du processus et son modèle. Nous avons choisi de considérer cet écart permanent comme une perturbation supplémentaire. Cette perturbation n'étant pas de moyenne nulle, l'hypothèse la plus simple consiste à la modéliser par un processus de WIENER, ce qui conduit à augmenter la dimension du vecteur d'état. L'estimation de ces nouveaux états fait alors apparaître naturellement les intégrateurs nécessaires pour éliminer l'erreur finale.

Le but de ce rapport est de montrer qu'on peut réaliser une régulation multivariable à caractère industriel grâce à l'optimisation quadratique. Nous avons développé certaines méthodes de calculs permettant d'effectuer le lien entre les équations théoriques et l'application pratique. Toutes ces méthodes ont été expérimentées en simulation, dans un premier stade, puis nous avons appliqué un certain nombre d'entre elles à la conduite d'un générateur de vapeur pilote.

Pour la commodité de la lecture, nous avons, dans la mesure du possible, présenté chacun des points ayant fait l'objet d'une étude sous forme d'un chapitre, comportant la présentation de la méthode, sa résolution théorique, les remarques qu'elle a suscitées, puis les essais pratiques et les programmes réalisés.

Dans une première partie, nous montrons que l'optimaliseur peut être calculé grâce à la résolution d'équations récurrentes, que les équations du processus soient données sous forme continue ou discrète.

Dans la deuxième partie, nous étudions divers reconstituteurs, qu'ils soient statiques comme la pseudo inverse, ou dynamiques comme le filtre de KALMAN ou les observateurs de LUENBERGER. Nous étudions aussi un filtre non linéaire permettant de reconstruire le vecteur d'état et d'estimer les caractéristiques statistiques des bruits.

La troisième partie regroupe tous les essais effectués sur générateur de vapeur. La régulation de ce processus a été effectuée aussi bien par voie analogique que numérique.

Nous avons pensé faciliter la présentation de cette partie au lecteur non familiarisé avec les générateurs de vapeur, en détaillant les diverses étapes de la résolution, depuis la présentation de l'installation et son identification jusqu'à la réalisation de la régulation complète.

Première Partie

OPTIMALISEUR

Chapitre 1

CALCUL DES ELEMENTS DE L'OPTIMALISEUR, EN VUE D'UNE REGULATION ANALOGIQUE, PAR UNE METHODE RECURRENTE

I - INTRODUCTION -

La commande à appliquer à un processus linéaire dans le but de minimiser un critère quadratique est un bouclage sur les états et un vecteur d'anticipation. La résolution classique du problème montre que les coefficients de bouclage sont solutions d'un système d'équations différentielles de RICCATI (B.2). Le vecteur d'anticipation est solution d'un système d'équations différentielles linéaires.

La résolution pratique de ces équations est quasi impossible sur calculateur analogique du fait de la nécessité d'un grand nombre d'éléments non linéaires.

D'autre part, la résolution d'équations différentielles convient mal au calculateur numérique.

Dans le cas stationnaire, une méthode, inspirée de celle de TYLER (B.1) réalise l'intégration analytique et conduit à des équations récurrentes parfaitement adaptées au calculateur numérique.

Le chapitre est consacré à la description de cette méthode qui offre un avantage très important au point de vue temps de calcul.

II - METHODE UTILISEE -

(1)	Processus		$\dot{x}(t) = Ax(t) + Du(t) + R_1$	$x(0)$ connu
			$y(t) = Hx(t)$	$z(t)$: consignes
			$e(t) = y(t) - z(t) = Hx(t) - z(t)$	

Le critère choisi minimise un compromis entre l'écart e (en particulier au temps final T) et les amplitudes prises par la commande u .

Critère $J = \frac{1}{2} e^T(T) F e(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (e^T(t) Q e(t) + u^T(t) R u(t)) dt$
 F, Q semi définies positives, R définie positive.

1 - Calcul de la commande (Equations de HAMILTON - PONTRYAGIN)

Posons :

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2} [e^T Q e + u^T R u] + p^T (Ax + Du + R_1)$$

$$(2) \quad \mathcal{H}(t) = \frac{1}{2} [(Hx-z)^T Q (Hx-z) + u^T R u] + p^T (Ax + Du + R_1)$$

p obéissant à :

$$(3) \quad \dot{p} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = - H^T Q (Hx-z) - A^T p$$

$$\begin{aligned} p(T) &= \frac{\partial}{\partial x(T)} \left[\frac{1}{2} e^T(T) F e(T) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x(T)} [(Hx(T) - z(T))^T F (Hx(T) - z(T))] \\ &= H^T F (Hx(T) - z(T)) \end{aligned}$$

Pour que u minimise $\mathcal{H}(t)$, il faut :

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial u} = Ru + D^T p = 0$$

$$(4) \quad u(t) = - R^{-1} D^T p(t)$$

2 - p(t) est une fonction linéaire de x(t)

En tenant compte de (1), (3), (4), les équations du processus en boucle fermée s'écrivent :

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - D R^{-1} D^T p(t) + R_1 \\ \dot{p}(t) = - H^T Q H x(t) - A^T p(t) + H^T Q z(t) \\ x(0) \text{ connu} ; \quad p(T) = H^T F H x(T) - H^T F z(T) \end{cases}$$

Posons :

$$L = \left[\begin{array}{c|c} A & -D R^{-1} D^T \\ \hline -H^T Q H & -A^T \end{array} \right]$$

(5) devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ -H^T Q z(t) \end{bmatrix}$$

Après intégration entre deux instants t_1 et t_2

$$(6) \quad \begin{bmatrix} x(t_2) \\ p(t_2) \end{bmatrix} = e^{L(t_2-t_1)} \begin{bmatrix} x(t_1) \\ p(t_1) \end{bmatrix} + \int_{t_1}^{t_2} e^{L(t_2-\tau)} \begin{bmatrix} R_1 \\ -H^T Q z(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

Posons :

$$e^{L(t_2-t_1)} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_2, t_1) & \phi_{12}(t_2, t_1) \\ \phi_{21}(t_2, t_1) & \phi_{22}(t_2, t_1) \end{bmatrix}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{L(t_2-\tau)} \begin{bmatrix} R_1 \\ H^T Q z(\tau) \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} H_1(t_1, t_2) \\ H_2(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

La relation (6) est vraie $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$

et en particulier pour $t_2 = T = \text{temps final}$
 $t_1 = t = \text{temps courant}$

(6) devient :

$$(7) \quad \begin{bmatrix} x(T) \\ p(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(T, t) & \phi_{12}(T, t) \\ \phi_{21}(T, t) & \phi_{22}(T, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1(T, t) \\ H_2(T, t) \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{aligned} \phi_{11}(T, T) &= \phi_{22}(T, T) = 1 \\ \phi_{12}(T, T) &= \phi_{21}(T, T) = 0 \\ H_1(T, T) &= H_2(T, T) = 0 \end{aligned}$$

en tenant compte des conditions finales sur $p(T)$, (7) s'écrit :

$$(8) \quad \begin{cases} (8') & x(T) = \phi_{11}(T, t) x(t) + \phi_{12}(T, t) p(t) + H_1(T, t) \\ (8'') & p(T) = \phi_{21}(T, t) x(t) + \phi_{22}(T, t) p(t) + H_2(T, t) \\ (8''') & = H^T F H x(T) - H^T F z(T) \end{cases}$$

Reportons dans $8'''$ $x(T)$ donné par $8'$:

$$\begin{aligned} \phi_{21}(T, t) x(t) + \phi_{22}(T, t) p(t) + H_2(T, t) &= \\ H^T F H [\phi_{11}(T, t) x(t) + \phi_{12}(T, t) p(t) + H_1(T, t)] - H^T F z(t) \end{aligned}$$

$$(\phi_{22} - H^T F H \phi_{12}) p(t) = (H^T F H \phi_{11} - \phi_{21}) x(t) + H^T F H H_1 - H^T F z(T) - H_2$$

$$\begin{aligned} p(t) &= [\phi_{22}(T, t) - H^T F H \phi_{12}(T, t)]^{-1} [H^T F H \phi_{11}(T, t) - \phi_{21}(T, t)] x(t) \\ &\quad - [\phi_{22}(T, t) - H^T F H \phi_{12}(T, t)]^{-1} [-H^T F H H_1(T, t) + H^T F z(T) + H_2(T, t)] \end{aligned}$$

$p(t)$ est donc une fonction linéaire de $x(t)$ de la forme :

$$(9) \quad \left| \begin{array}{l} p(t) = K(t) x(t) - g(t) \quad \text{pour } \forall t \in [0, T] \\ \text{avec } K(T) = H^T F H \\ \quad \quad \quad g(T) = H^T F z(T) \end{array} \right.$$

donc $u(t) = -R^{-1} D^T [K(t) x(t) - g(t)]$

3 - Relations de récurrence

Grâce à (6) et (9), en prenant des notations analogues à (8), nous pouvons écrire :

$$(10) \quad \left| \begin{array}{ll} (10') & \\ x(t_2) = \phi_{11}(t_2, t_1) x(t_1) + \phi_{12}(t_2, t_1) p(t_1) + H_1(t_2, t_1) & \\ (10'') & (10''') \\ p(t_2) = \phi_{21}(t_2, t_1) x(t_1) + \phi_{22}(t_2, t_1) p(t_1) + H_2(t_2, t_1) & = K(t_2)x(t_2) - g(t_2) \end{array} \right.$$

Remplaçons 10' par son expression dans 10''' :

$$\begin{aligned} \phi_{21}(t_2, t_1) x(t_1) + \phi_{22}(t_2, t_1) p(t_1) + H_2(t_2, t_1) &= \\ K(t_2) [\phi_{11}(t_2, t_1) x(t_1) + \phi_{12}(t_2, t_1) p(t_1) + H_1(t_2, t_1)] - g(t_2) & \\ [\phi_{22}(t_2, t_1) - K(t_2) \phi_{12}(t_2, t_1)] p(t_1) = [K(t_2) \phi_{11}(t_2, t_1) - \phi_{21}(t_2, t_1)] x(t_1) & \\ - H_2(t_2, t_1) + K(t_2) H_1(t_2, t_1) - g(t_2) & \\ p(t_1) = [\phi_{22}(t_2, t_1) - K(t_2) \phi_{12}(t_2, t_1)]^{-1} [K(t_2) \phi_{11}(t_2, t_1) - \phi_{21}(t_2, t_1)] x(t_1) & \\ - [\phi_{22}(t_2, t_1) - K(t_2) \phi_{12}(t_2, t_1)]^{-1} [-K(t_2) H_1(t_2, t_1) + H_2(t_2, t_1) + g(t_2)] & \\ = K(t_1) x(t_1) - g(t_1) & \end{aligned}$$

Soit :

$$\left| \begin{array}{l} K(t_1) = [\phi_{22}(t_2, t_1) - K(t_2) \phi_{12}(t_2, t_1)]^{-1} [K(t_2) \phi_{11}(t_2, t_1) - \phi_{21}(t_2, t_1)] \\ g(t_1) = [\phi_{22}(t_2, t_1) - K(t_2) \phi_{12}(t_2, t_1)]^{-1} [-K(t_2) H_1(t_2, t_1) + H_2(t_2, t_1) + g(t_2)] \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ll} K(T) = H^T F H & K = \text{matrice } n \times n \\ g(T) = H^T F z(T) & g = \text{vecteur } n \times 1 \end{array} \right.$$

Les matrices $\Phi_{ij}(t_2, t_1)$ ne dépendent que de la différence $t_2 - t_1$.
Les matrices $H_i(t_2, t_1)$ peuvent se mettre sous la forme :

$$H_i(t_2, t_1) = M_i(\Delta t) \begin{bmatrix} R_1 \\ \hline H^T Q z(t_1) \end{bmatrix} = H_i(\Delta t, z(t_1))$$

à condition de considérer :

$$z(\tau) = z(t_1) = \text{constante pour } \tau \in [t_1, t_2] \quad (\text{cf. 4})$$

Posons :

$$\begin{cases} t_2 - t_1 = \Delta t \\ t_2 = n \Delta t \\ t_1 = (n-1)\Delta t \\ K(n\Delta t) = K_n \\ g(n\Delta t) = g_n \end{cases} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{(n-1)\Delta t} \quad \xrightarrow{n\Delta t} \\ \xleftarrow{\Delta t} \\ t_1 \quad \quad \quad t_2 \end{array}$$

Il vient : |B.1|

$$(11) \quad \begin{cases} K_{n-1} = [\Phi_{22}(\Delta t) - K_n \Phi_{12}(\Delta t)]^{-1} [K_n \Phi_{11}(\Delta t) - \Phi_{21}(\Delta t)] \\ g_{n-1} = [\Phi_{22}(\Delta t) - K_n \Phi_{12}(\Delta t)]^{-1} [H_2(\Delta t, z_{n-1}) + g_n - K_n H_1(\Delta t, z_{n-1})] \\ K_N = K(T) = H^T F H \\ g_N = g(T) = H^T F z(T) \end{cases}$$

pour un Δt donné, $\Phi_{ij}(\Delta t)$ et $M_i(\Delta t)$ sont des matrices constantes.

4 - Calcul des $\Phi_{ij}(t_2, t_1)$ et $H_i(t_2, t_1)$ [soit de $\Phi_{ij}(\Delta t)$ et $H_i(\Delta t, z_{n-1})$]

$$a-e^{L(t_2-t_1)} = e^{L\Delta t} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(\Delta t) & \Phi_{12}(\Delta t) \\ \hline \Phi_{21}(\Delta t) & \Phi_{22}(\Delta t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{L^i(\Delta t)^i}{i!}$$

$$b - \begin{bmatrix} H_1(t_2, t_1) \\ \hline H_2(t_2, t_1) \end{bmatrix} = \int_{t_1}^{t_2} e^{L(t_2-\tau)} \begin{bmatrix} R_1 \\ \hline H^T Q z(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

Nous supposons :

$$z(\tau) = z(t_1) = \text{constante pour } \tau \in [t_1, t_2] \quad (\text{bloqueur d'ordre zéro sur } z(t))$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} H_1(t_2, t_1) \\ \vdots \\ H_2(t_2, t_1) \end{bmatrix} &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{L^i(t_2-\tau)^i}{i!} \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ H^T Q z(\tau) \end{bmatrix} d\tau \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{L^i(t_2-t_1)^{i+1}}{(i+1)!} \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ H^T Q z(t_1) \end{bmatrix} \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{L^i(\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!} \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ H^T Q z(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(\Delta t, z(t_1)) \\ \vdots \\ H_2(\Delta t, z(t_1)) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

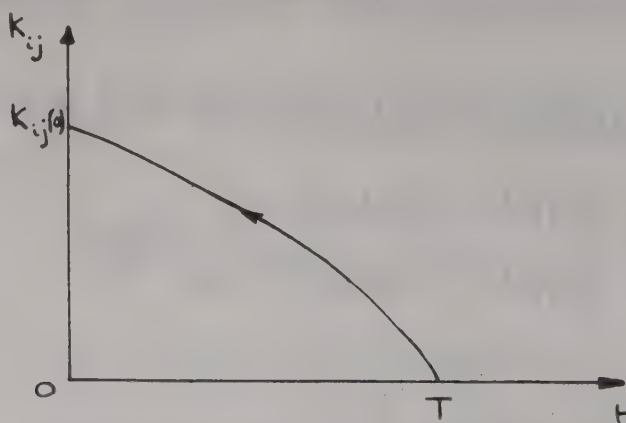
$$\begin{bmatrix} H_1(\Delta t, z_{n-1}) \\ \vdots \\ H_2(\Delta t, z_{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(\Delta t) \\ \vdots \\ M_2(\Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ H^T Q z_{n-1} \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{bmatrix} M_1(\Delta t) \\ \vdots \\ M_2(\Delta t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{L^i(\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!}$$

La résolution numérique de ce problème comportera deux parties importantes :

- 1^e - Calcul des $\phi_{ij}(\Delta t)$ et $M_i(\Delta t)$ avec la précision désirée
- 2^e - Calcul itératif des relations (11).

5 - Application au cas d'un horizon fuyant

La résolution des équations précédentes se faisant en remontant le temps, l'évolution d'un terme K_{ij} de la matrice K peut être schématisée par :



L'emploi d'un horizon fuyant suppose à chaque instant que l'optimisation va s'effectuer sur la période T qui va suivre.

Chaque instant courant t coïncidera donc avec le repère zéro de la figure ci-dessus, qui se traduira le long de l'axe des temps.

La valeur à attribuer au coefficient K_{ij} sera donc $K_{ij}(0)$ [Bouclage constant].

Si, de plus, la période d'optimisation T est suffisamment grande [de l'ordre de grandeur du temps de réponse en boucle ouverte du processus stationnaire], $K_{ij}(0)$ représentera le régime permanent de l'équation différentielle dont il est solution.

Si la consigne z est supposée constante, ou se met sous forme d'équations d'état, le vecteur d'anticipation g tendra vers un régime permanent et pourra s'exprimer linéairement en fonction de z .

III - CONCLUSION -

Nous avons exposé une méthode de résolution des équations de RICCATI qui s'avère mieux adaptée au calculateur numérique que les méthodes classiques de résolution des équations différentielles.

Le gain de temps réalisé est appréciable : pour un même problème, le temps de calcul a été de vingt-cinq minutes sur 360/30 par la méthode classique et de quatre minutes par la méthode récurrente.

L'approximation que constitue l'utilisation d'un bloqueur sur la consigne est de toute façon une exigence du calculateur numérique.

La résolution préconisée dans ce chapitre s'applique au cas d'un processus que l'on désire réguler par voie analogique.

Lorsque l'on désire réaliser la régulation par voie numérique, il faut au préalable transformer les équations continues du processus sous forme discrète. La résolution du problème d'optimisation conduit alors tout naturellement à des équations récurrentes. L'objet du chapitre suivant est de traiter ce dernier cas.

IV - PROGRAMME REALISE -

1 - Description de la méthode

A - Calcul des $\phi_{ij}(\Delta t)$ et $M_i(\Delta t)$

a) Calcul de :

$$L = \begin{bmatrix} \overset{n}{\overbrace{A}} & \overset{n}{\overbrace{-D R^{-1} D^T}} \\ \hline \underset{n}{\overbrace{-H^T Q H}} & \underset{n}{\overbrace{-A^T}} \end{bmatrix} ; F = \begin{bmatrix} \overset{n}{\overbrace{I}} & \overset{m}{\overbrace{0}} \\ \hline \underset{n}{\overbrace{0}} & \underset{n}{\overbrace{H^T Q}} \end{bmatrix}$$

b) Calcul de :

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}(\Delta t) & \phi_{12}(\Delta t) \\ \hline \phi_{21}(\Delta t) & \phi_{22}(\Delta t) \end{bmatrix} = e^{L\Delta t} = \sum_{i=0}^k \frac{L^i(\Delta t)^i}{i!}$$

La convergence est réalisée lorsque le maximum en valeur absolue de la différence relative prise termes à termes entre $\sum_{i=0}^k$ et $\sum_{i=0}^{k+1}$ est inférieur à une précision ϵ .

c) Calcul de :

$$M = \sum_{i=0}^k \frac{L^i(\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!}$$

Divers essais ont montré que la convergence de M était réalisée pour un même indice k que celui du b.

La connaissance de k nous permet d'effectuer le calcul de la façon suivante :

$$M = I\Delta t + \frac{L\Delta t}{2} (I\Delta t + \frac{L\Delta t}{3} (I\Delta t + \frac{L\Delta t}{4} (\dots (I\Delta t + \frac{L\Delta t}{k+1}))) \dots)$$

B - Calcul de K et g

Par raison de commodité, les indices de la récurrence (11) sont modifiés. Soit :

$$(12) \quad \begin{cases} K_n = [\phi_{22}(\Delta t) - K_{n-1} \phi_{12}(\Delta t)]^{-1} [K_{n-1} \phi_{11}(\Delta t) - \phi_{21}(\Delta t)] \\ g_n = [\phi_{22}(\Delta t) - K_{n-1} \phi_{12}(\Delta t)]^{-1} [g_{n-1} + H_2(\Delta t, z_n) - K_{n-1} H_1(\Delta t, z_n)] \\ K_0 = 0 \quad ; \quad g_0 = 0 \end{cases}$$

La récurrence (12) a été traitée sous forme "condensée".

Calcul de K

Formons la matrice : $\left[\begin{array}{c|c} \xrightarrow{n} & \xrightarrow{n} \\ K_{n-1} & -I \end{array} \right] \updownarrow n$

Calculons :

$$N = [K_{n-1} \mid -I] \times \left[\begin{array}{c|c} \phi_{11}(\Delta t) & \phi_{12}(\Delta t) \\ \hline \phi_{21}(\Delta t) & \phi_{22}(\Delta t) \end{array} \right] = \left[K_{n-1} \phi_{11} - \phi_{21} \mid \underbrace{K_{n-1} \phi_{12} - \phi_{22}}_{-c} \right]$$

$$\begin{aligned} C^{-1}N &= [(\phi_{22} - K_{n-1} \phi_{12})^{-1} (K_{n-1} \phi_{11} - \phi_{21}) \mid -1] \\ &= [K_n \mid -1] \end{aligned}$$

Calcul de g

$$\left[\begin{array}{c} H_1(\Delta t, z_n) \\ \hline H_2(\Delta t, z_n) \end{array} \right] = M(\Delta t) F \left[\begin{array}{c} R_1 \\ \hline z_n \end{array} \right]$$

Calculons au préalable :

$$S = [K_{n-1} \mid -1] M(\Delta t)$$

Finalement :

$$g_n = C^{-1} \left[-S \left[\begin{array}{c} R_1 \\ \hline z_n \end{array} \right] + g_{n-1} \right]$$

2 - Description du programme

Nom du programme : K G

But : A, D, R₁, H, Q, R étant donnés ainsi que la consigne, calcul de la matrice K de bouclage et du vecteur G.

Dimension maximale du vecteur d'état = 20.

Taille : 8500 mots de 1130.

BIBLIOGRAPHIE

- |B.1| J. TYLER - "The synthesis of multivariable control systems through optimization"
Yale University 1965

- |B.2| ATHANS et FALB - "Optimal control"
Mc Graw-Hill Book Company.

- |B.3| BERTHY et - "Rapport interne"
DONCARLI
Juillet 1971

Chapitre 2

CALCUL DES ELEMENTS DE L'OPTIMALISEUR EN VUE D'UNE REGULATION NUMERIQUE

I - INTRODUCTION -

L'élargissement de la gamme des calculateurs en temps réel, ainsi que la baisse de leur prix de vente, peut conduire l'utilisateur à réaliser la régulation d'un processus continu grâce à un calculateur numérique.

Dans ce but, le processus continu doit être assimilé à un processus discret par l'adjonction d'un bloqueur sur ses commandes et d'un échantillonneur sur ses sorties.

La discrétisation la plus courante des équations continues du processus consiste à remplacer une dérivée $\dot{X}$ par rapport au temps par $\frac{X_{t+1} - X_t}{\Delta t}$, Δt étant la période d'échantillonnage. Cette approximation au premier ordre n'est valable que si Δt est petit. Nous développerons dans la première partie de ce chapitre une méthode permettant de réaliser une approximation à un ordre quelconque.

Les équations de l'ensemble bloqueur - processus étant alors données sous forme discrète, la résolution du problème d'optimisation avec critère quadratique conduit à une commande, qui, comme dans le cas continu, se compose d'un bouclage sur les composantes du vecteur d'état, et d'un vecteur d'anticipation.

L'objet de la deuxième partie de ce chapitre est d'établir les équations récurrentes dont les coefficients de l'optimaliseur sont solution.

II - EQUATIONS DISCRETES DE L'ENSEMBLE BLOQUEUR - PROCESSUS - ECHANTILLONNEUR - |B.2|

Soit un processus continu :

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{X} = AX + Du + R_1 \\ Y = HX + \mu \end{cases} \quad \begin{matrix} A, D, R_1 \\ H, \mu \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Stationnaires} \end{matrix}$$

La solution de (a) est :

$$(b) \quad X(t_2) = e^{A(t_2-t_1)} X(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} [D u(\tau) + R_1] d\tau$$

En supposant sur la commande u un bloqueur d'ordre zéro, c'est-à-dire :

$$u(\tau) = u(t_1) = \text{constante pour } \tau \in [t_1, t_2]$$

nous pouvons calculer l'intégrale intervenant dans (b),

L'intégration directe faisant intervenir l'inverse de la matrice A (qui n'est pas forcément régulière), nous allons utiliser le biais du développement en série.

$$e^{A(t_2-\tau)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i (t_2-\tau)^i}{i!}$$

(b) devient après intégration :

$$X(t_2) = e^{A(t_2-t_1)} X(t_1) - \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i (t_2-\tau)^{i+1}}{(i+1)!} (Du(t_1) + R_1) \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$X(t_2) = e^{A(t_2-t_1)} X(t_1) + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i (t_2-t_1)^{i+1}}{(i+1)!} (Du(t_1) + R_1)$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} t_2 - t_1 = \Delta t \\ X(t_2) = X_{n+1} \\ X(t_1) = X_n \\ u(t_1) = u_n \end{cases}$$

nous obtenons l'équation récurrente :

$$X_{n+1} = e^{A\Delta t} X_n + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i (\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!} (D u_n + R_1)$$

En rapprochant cette équation de la forme classique :

$$\begin{cases} X_{n+1} = P X_n + Q u_n + \chi \\ Y_n = H X_n + \mu \end{cases}$$

Nous déduisons :

$$\left| \begin{array}{l} P = e^{A\Delta t} \\ Q = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i (\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!} D \\ X = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i (\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!} R_1 \end{array} \right.$$

Remarque : Il apparait de cette façon certains couplages (du fait de $e^{A\Delta t}$ et A^i) qui n'interviennent pas lors d'une approximation au 1er ordre.

III - ETABLISSEMENT DES EQUATIONS RECURRENTES DE COMMANDE - (multiplicateurs de Lagrange [B.1])

1 - Position du problème

$$\begin{array}{l|l} \text{Processus} & \begin{array}{l} X_{t+1} = P_t X_t + Q_t u_t + X_t \quad X_0 \text{ donné} \\ Y_t = H_t X_t + \mu_t \end{array} \end{array}$$

$$\text{Critère} \quad J = \frac{1}{2} X_N^T A_N X_N + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (Y_i^T A_i Y_i + u_i^T B_i u_i)$$

A_N, A_i, B_i définies positives.

Nous cherchons la commande u_t qui minimise le critère J pour $t \in [0, N-1]$, c'est-à-dire qui rend Y aussi proche que possible de zéro sans se livrer à des variations d'amplitudes trop importantes.

2 - Résolution

a - Posons :

$$\mathcal{H}_t = \frac{1}{2} (Y_t^T A_t Y_t + u_t^T B_t u_t) + \psi_{t+1}^T [P_t X_t + Q_t u_t + X_t]$$

Soit, en fonction de X_t :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t = \frac{1}{2} [(H_t X_t + \mu_t)^T A_t (H_t X_t + \mu_t) + u_t^T B_t u_t] \\ + \psi_{t+1}^T (P_t X_t + Q_t u_t + X_t) \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} \psi_t = \frac{\partial \mathcal{H}_t}{\partial X_t} = H_t^T A_t (H_t X_t + \mu_t) + P_t^T \psi_{t+1} \\ \psi_N = A_N X_N \end{array} \right.$$

La commande u_t est solution de :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_t}{\partial u_t} = B_t u_t + Q_t^T \psi_{t+1} = 0$$

$$(1) \quad u_t = -B_t^{-1} Q_t^T \psi_{t+1}$$

Soit :

$$(2) \quad X_{t+1} = P_t X_t - Q_t B_t^{-1} Q_t^T \psi_{t+1} + \dot{X}_t$$

$$(3) \quad \psi_t = H_t^T A_t H_t X_t + P_t^T \psi_{t+1} + H_t^T A_t u_t$$

$$X_0 \text{ donné} ; \quad \psi_N = A_N X_N$$

Par analogie avec la cas continu, écrivons qu'il existe entre X_t et ψ_t une relation du type :

$$(4) \quad \psi_t = \alpha_t X_t - \beta_t$$

et déterminons α_t, β_t, u_t .

b - Calcul de u_t

$$(5) \quad \psi_{t+1} = \alpha_{t+1} X_{t+1} - \beta_{t+1}$$

$$(1) \text{ et } (5) \Rightarrow u_t = -B_t^{-1} Q_t^T (\alpha_{t+1} X_{t+1} - \beta_{t+1})$$

$$B_t u_t = -Q_t^T [\alpha_{t+1} (P_t X_t + Q_t u_t + \dot{X}_t) - \beta_{t+1}]$$

$$(6) \quad u_t = - (B_t + Q_t^T \alpha_{t+1} Q_t)^{-1} [Q_t^T \alpha_{t+1} P_t X_t - (B_t + Q_t^T \alpha_{t+1} Q_t)^{-1} Q_t^T (\alpha_{t+1} X_t - \beta_{t+1})]$$

Posons :

$$(7) \quad u_t = S_t X_t + G_t$$

Il vient :

$$(8) \quad \begin{cases} S_t = - (B_t + Q_t^T \alpha_{t+1} Q_t)^{-1} Q_t^T \alpha_{t+1} P_t \\ G_t = - (B_t + Q_t^T \alpha_{t+1} Q_t)^{-1} Q_t^T (\alpha_{t+1} X_t - \beta_{t+1}) \end{cases}$$

c - Calcul de α_t et β_t

$$(3) \text{ et } (5) \Rightarrow \psi_t = H_t^T A_t H_t X_t + P_t^T [\alpha_{t+1} X_{t+1} - \beta_{t+1}] + H_t^T A_t \mu_t$$

$$(9) \quad \psi_t = H_t^T A_t H_t X_t + P_t^T [\alpha_{t+1} (P_t X_t + Q_t u_t + X_t) - \beta_{t+1}] + H_t^T A_t \mu_t$$

$$\begin{aligned} (9) \text{ et } (6) \Rightarrow \psi_t &= [P_t^T \alpha_{t+1} P_t + H_t^T A_t H_t - P_t^T \alpha_{t+1} Q_t (B_t + Q_t^T \alpha_{t+1} Q_t)^{-1} Q_t^T \alpha_{t+1} P_t] X_t \\ &\quad + P_t^T \alpha_{t+1} [X_t - Q_t (B_t + Q_t^T \alpha_{t+1} Q_t)^{-1} Q_t^T (\alpha_{t+1} X_t - \beta_{t+1})] \\ &\quad - P_t^T \beta_{t+1} + H_t^T A_t \mu_t \\ &= \alpha_t X_t - \beta_t \end{aligned}$$

avec $\psi_N = A_N X_N = \alpha_N X_N - \beta_N$

Soit :

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha_t = P_t^T \alpha_{t+1} [1 - Q_t (B_t + Q_t^T \alpha_{t+1} Q_t)^{-1} Q_t^T \alpha_{t+1}] P_t + H_t^T A_t H_t \\ \beta_t = P_t^T [-1 + \alpha_{t+1} Q_t (B_t + Q_t^T \alpha_{t+1} Q_t)^{-1} Q_t^T] (\alpha_{t+1} X_t - \beta_{t+1}) \\ \quad - H_t^T A_t \mu_t \end{cases}$$

avec les conditions finales : $\alpha_N = A_N$
 $\beta_N = 0$

La commande u_t se déduit en fonction de X_t grâce à (7), (8), (10).

Remarque : Ces résultats peuvent être trouvés par différentes méthodes et en particulier par la programmation dynamique [cf. Annexe]. Les différentes formes littérales se déduisent les unes des autres grâce à l'identité matricielle :
 $(A+B \ C \ D)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B [C^{-1} + D A^{-1} B]^{-1} D A^{-1}$

d - Application au cas d'un horizon fuyant

De la même façon que pour le cas d'équations continues [I,1,5], la valeur à attribuer à α , donc à S , sera la solution des équations (8) et (10) après N itérations. Si N est suffisamment grand et si le processus est stationnaire, cette matrice α correspondra au régime permanent de l'équation (10).

Si, de plus, les excitations sont considérées constantes pendant la période d'optimisation, β et donc G s'exprimeront linéairement en fonction des excitations.

IV - CONCLUSION -

Les résultats obtenus à partir d'équations discrètes sont semblables à ceux obtenus à partir d'équations continues, et il est naturel d'aboutir à des programmes qui ont sensiblement le même encombrement mémoire et le même temps d'exécution [2 mn sur 360/40].

Un tel optimiseur a été expérimenté en ligne pour un problème dont le vecteur d'état est à sept dimensions, dans le cas où S est stationnaire et G s'exprime linéairement en fonction de la consigne. Le temps de calcul sur EAI 640 de la commande :

$$u_t = S X_t + G_t$$

s'exprime alors en dixièmes de secondes.

D'après les concepts mêmes d'optimisation et d'état, l'application de la commande optimale nécessite la connaissance de toutes les composantes du vecteur d'état. Dans le cas usuel, ces dernières ne sont pas toutes accessibles à la mesure : l'application pratique de l'optimisation quadratique exige donc un "reconstructeur d'états",

Dans la deuxième partie, divers types de reconSTRUCTEURS sont étudiés.

V - PROGRAMME REALISE -

A - Equations discrètes de l'ensemble bloqueur - processus - échantillonneur

1 - Principe du programme

Le programme réalisé calcule les expressions :

$$\left| \begin{aligned} P &= e^{A\Delta t} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i (\Delta t)^i}{i!} \\ Q &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i (\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!} D \\ X &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i (\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!} R_1 \end{aligned} \right.$$

Le calcul des séries s'arrête lorsque le critère de convergence est satisfait.

Critère de convergence (sous programme MAXDI)

On effectue la différence relative termes à termes entre les matrices $\sum_{i=0}^{n+1}$ et $\sum_{i=0}^n$. La convergence est réalisée si, pour tous les termes, cette différence en valeur absolue est inférieure à une précision P. Il existe une protection contre les termes nuls ou trop petits, pour éviter les divisions par zéro.

2 - Description du programme

Nom du programme : PETQ

But : A, D, R_1 , Δt étant donnés, calculer P, Q, X.

Taille : 3000 mots 1130 pour A = 7 x 7

B - Résolution des équations récurrentes de commande

1 - Description de la méthode [Processus stationnaire - Excitations constantes]

$$\begin{array}{l|l} \text{Processus} \\ \text{(stationnaire)} & \begin{cases} X_{t+1} = P X_t + Q u_t + \chi & X_0 \text{ donné} \\ Y_t = H X_t + \mu \end{cases} \end{array}$$

$$\text{Critère} \quad J = \sum_{i=t}^{t+(N-1)\Delta t} (Y_i^T A Y_i + u^T B u)$$

(pas de coût final)

La commande est donnée par :

$$u_t = S X_t + G$$

avec :

$$\begin{cases} S = - (B + Q^T \alpha Q)^{-1} Q^T \alpha P \\ G = - (B + Q^T \alpha Q)^{-1} Q^T (\alpha \chi - \beta) \end{cases}$$

α et β étant :

- soit les régimes permanents de (11) (test de convergence MAXDI)
- soit les solutions au bout de N itérations

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha_t = P^T \alpha_{t+1} [I - Q(B + Q^T \alpha_{t+1} Q)^{-1} Q^T \alpha_{t+1}] P + H^T A H \\ \beta_t = P^T [-I + \alpha_{t+1} Q(B + Q^T \alpha_{t+1} Q)^{-1} Q^T] (\alpha_{t+1} \chi - \beta_{t+1}) - H^T A \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_N = 0 \\ \beta_N = 0 \end{cases}$$

2 - Description du programme

Nom du programme : SETG

But : Calcul du régime permanent des matrices S et G de bouclage et d'anticipation d'un processus stationnaire décrit par des équations discrètes (P, Q, χ , H, μ , A, B).

Taille : 22 000 octets 360

CALCUL DE L'OPTIMALISEUR
GRACE A LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE

1 - Position du problème

Soit un processus décrit par des équations discrètes :

$$\begin{cases} X_{t+1} = P_t X_t + Q_t u_t + x_t \\ Y_t = H_t X_t + u_t \end{cases} \quad X_0 \text{ donné}$$

Nous cherchons la commande u_t qui minimise, pour $t \in [0, N-1]$, le critère :

$$J = \frac{1}{2} X_N^T A_N X_N + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (Y_i^T A_i Y_i + u_i^T B_i u_i)$$

2 - Résolution |B.3|

a - Notons $R_t(X_t)$ le coût optimal entre la $t^{\text{ième}}$ étape et la $N^{\text{ième}}$.

Le principe d'optimalité de BELLMAN conduit à l'équation récurrente :

$$(1) \quad R_t(X_t) = \min_{u_t} \left\{ \frac{1}{2} [Y_t^T A_t Y_t + u_t^T B_t u_t] + R_{t+1}(X_{t+1}) \right\}$$

$$R_N(X_N) = \frac{1}{2} X_N^T A_N X_N$$

En omettant l'indice t , et en remplaçant l'indice $t+1$ par $+$, l'équation (1) devient après élimination de Y_t et X_{t+1} :

$$R(X) = \min_u \left\{ \frac{1}{2} (HX + u)^T A (HX + u) + \frac{1}{2} u^T B u + R^+(PX + Qu + x) \right\}$$

Le critère étant quadratique, $R(X)$ est de la forme :

$$R(X) = \frac{1}{2} [\gamma - 2 \beta^T X + X^T \alpha X]$$

où α , β , γ sont des fonctions de t à déterminer.

Alors :

$$R^+(PX + Qu + \chi) = \frac{1}{2} \left[\gamma^+ - 2 \beta^{+T} (PX + Qu + \chi) + (PX + Qu + \chi)^T \alpha^+ (PX + Qu + \chi) \right]$$

d'où :

$$R(X) = \min_u \left\{ \frac{1}{2} (HX + \mu)^T A (HX + \mu) + \frac{1}{2} u^T B u + \frac{\gamma^+}{2} - \beta^{+T} (PX + Qu + \chi) + \frac{1}{2} (PX + Qu + \chi)^T \alpha^+ (PX + Qu + \chi) \right\}$$

b - Calcul de u

u s'obtient en annulant la dérivée du second membre, soit :

$$u = - (B + Q^T \alpha^+ Q)^{-1} Q^T [-\beta^+ + \alpha^+ (PX + \chi)]$$

Posons :

$$u = SX + G$$

S et G étant des fonctions de t telles que :

$$S = - (B + Q^T \alpha^+ Q)^{-1} Q^T \alpha^+ P$$

$$G = - (B + Q^T \alpha^+ Q)^{-1} Q^T (\alpha^+ \chi - \beta^+)$$

c - Calcul de α et β

En remplaçant u par son expression dans R(X), il vient :

$$R(X) = \frac{1}{2} \left\{ (HX + \mu)^T A (HX + \mu) + (SX + G)^T B (SX + G) + \gamma^+ - 2 \beta^{+T} [PX + Q(SX + G) + \chi] + [PX + Q(SX + G) + \chi]^T \alpha^+ [PX + Q(SX + G) + \chi] \right\}$$

R(X) est bien de la forme :

$$R(X) = \frac{1}{2} [\gamma - 2 \beta^T X + X^T \alpha X]$$

avec :

$$\begin{cases} \gamma = \mu^T A \mu + G^T B G + \gamma^+ - 2 \beta^{+T} Q G - 2 \beta^{+T} \chi + \chi^T \alpha^+ \chi \\ \quad + G^T Q^T \alpha^+ Q G \\ \alpha = H^T A H + S^T B S + (P + QS)^T \alpha^+ (P + QS) \\ \beta = - [\mu^T A H + G^T B S - \beta^{+T} (P + QS) + (QG + \chi)^T \alpha^+ (QG + \chi)] \end{cases}$$

(pour obtenir ces relations, nous tenons compte du fait que le scalaire $\beta^T X$ est égal à son transposé)

En remplaçant S et G par leur expression, il vient, après simplification :

$$\begin{cases} \alpha = + P^T \alpha^+ | 1 - Q(B + Q^T \alpha^+ Q)^{-1} Q^T \alpha^+ | P + H^T A H \\ \beta = + P^T | -1 + \alpha^+ Q(B + Q^T \alpha^+ Q)^{-1} Q^T | (\alpha^+ \chi - \beta^+) - H^T A u \end{cases}$$

avec les conditions finales :

$$\begin{cases} \alpha_N = A_N \\ \beta_N = 0 \end{cases}$$

Remarque :

On ne tient pas compte de γ , puisque seuls α et β interviennent dans l'élaboration de la commande.

BIBLIOGRAPHIE

- |B.1| - Arthur BRYSON et YU - CHI HO
"Applied Optimal Control"
Blaisdell Publishing Company
- |B.2| - Automatique - Espace d'état
Cours de Y. THOMAS - E.N.S.M. - Nantes
- |B.3| - BOUDAREL - DELMAS - GUICHET
"Commande optimale des processus"
Tome 3, Dunod
- |B.4| - VALIN - LE TREGUILLY
"Rapport interne"
Juillet 1971

Deuxième Partie

RECONSTRUCTEUR

Chapitre 1

PSEUDO-INVERSE

I - INTRODUCTION -

Soit un processus représenté par les équations :

$$\begin{array}{lcl} (1) & \dot{x} = A x + D u & x \text{ vecteur de dimension } n \\ (2) & y = H x & y \text{ vecteur de dimension } m \\ & & u \text{ vecteur de dimension } r \end{array}$$

H étant une matrice de rang maximal, c'est-à-dire $\text{rang de } H = \inf(m, n)$.

L'objet de ce chapitre est de déterminer le vecteur x en ne tenant compte que des informations fournies par les équations de mesure (2) et en ignorant volontairement les équations dynamiques (1).

Les équations $y = H x$ forment un système algébrique de m équations dont les n inconnues sont les composantes du vecteur x .

Suivant les valeurs de m et n , le système se classera dans l'une des catégories suivantes :

- a - $m = n$ système régulier
- b - $m < n$ système indéterminé
- c - $m > n$ système surabondant

Dans le cas "a", le système (2) admet la solution unique $x = H^{-1} y$

Dans le cas "b", le système (2) admet une infinité de solutions, et la difficulté réside dans le choix de l'une d'entre elles.

Dans le cas "c", le système (2) n'admet aucune solution.

Si aucun vecteur x ne peut annuler la différence $y - H x$, il existera toutefois un vecteur minimisant la norme de cette différence.

La reconstruction du vecteur d'état grâce à la résolution algébrique d'un système d'équations est intéressante sur le plan pratique, car elle néces-

site fort peu de matériel en ligne. C'est pourquoi nous développerons les cas "b" et "c" dont la résolution a pris le nom de pseudo-inverse.

II - METHODE UTILISEE -

La solution de $y = H x$

x de dimension n

y de dimension m

rang de $H = \inf(m, n)$

est :

$$a - \text{Si } m = n \quad x = H^{-1} y$$

$$b - \text{Si } m < n \quad x = H^T (H H^T)^{-1} y$$

$$c - \text{Si } m > n \quad x = (H^T H)^{-1} H^T y$$

Il existe plusieurs démonstrations, et surtout plusieurs interprétations de ces résultats. Nous nous proposons ici de les présenter comme des cas particuliers de l'expression générale de l'espérance d'une variable aléatoire, conditionnellement à une mesure. Pour cela, proposons une autre formulation du problème :

Soit x un vecteur aléatoire d'espérance x^* , de covariance M^*

Soit l'équation de mesure :

$$y = H x + \delta$$

δ étant un vecteur aléatoire indépendant de covariance :

$$\Phi = E(\delta \delta^T)$$

alors l'espérance et la covariance de x , conditionnellement à y , sont : (cf. 1ère partie - chapitre II - Annexe)

$$(3) \quad \begin{cases} \hat{x} = x^* + M^* H^T (H M^* H^T + \Phi)^{-1} (y - H x^*) \\ \hat{M} = M^* - M^* H^T (H M^* H^T + \Phi)^{-1} H M^* \end{cases}$$

Ne voulant tenir compte que des équations de mesure, nous nous placerons dans le cas où nous n'avons aucune information a priori sur le vecteur d'état et nous prendrons :

$$x^* = 0 \quad \text{et} \quad M^* = \alpha [1], \quad \alpha \rightarrow \infty$$

1 - $m < n$ (plus d'inconnues que de mesures)

(3) devient :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \alpha H^T (\alpha H H^T + \Phi)^{-1} y \\ &= H^T (H H^T + \frac{1}{\alpha} \Phi)^{-1} y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \alpha [1] - \alpha H^T (\alpha H H^T + \Phi)^{-1} H \alpha \\ &= \alpha [1 - H^T (H H^T + \frac{1}{\alpha} \Phi)^{-1} H]\end{aligned}$$

Comme $\alpha \rightarrow \infty$, à la limite :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= H^T (H H^T)^{-1} y = P_d y \\ \hat{M} &\rightarrow \infty\end{aligned}$$

Si H est de rang m , $H H^T = m \times m$ est régulière.

Remarquons que :

$$H P_d = H H^T (H H^T)^{-1} = I$$

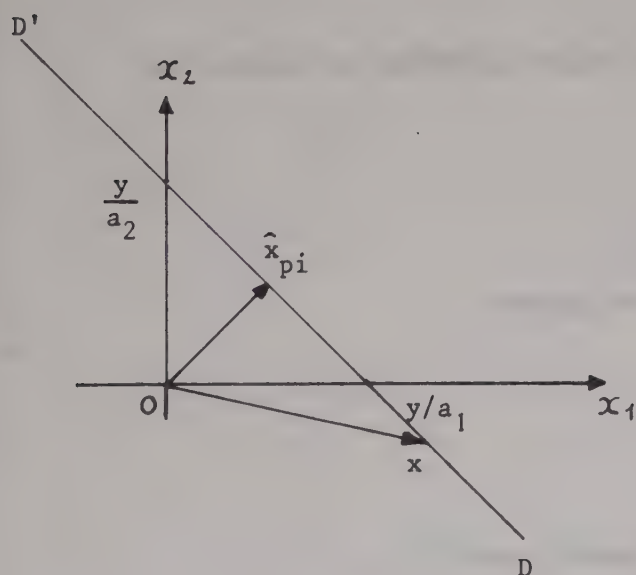
ce qui justifie le nom de pseudo-inverse droite donné à P_d .

La variance reste infinie. On peut montrer facilement [B.2] que $\hat{x}$ est le vecteur solution de $y = H x$ qui est de norme minimale.

Montrons sur un exemple simple que cette notion de norme minimale peut être intuitive :

Cherchons la solution $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ de :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = y \quad \text{où } y \text{ est donné}$$



Nous pouvons prendre pour $\hat{x}$ n'importe quel vecteur d'origine O et d'extrémité sur la droite $D D'$. Le véritable vecteur x fait partie de cette famille. Parmi les estimations possibles $\hat{x}$, le vecteur $\hat{x}_{pi}$ perpendiculaire à $D D'$ sera celui qui en moyenne sera le plus proche de x .

2 - $m > n$ (plus de mesures que d'inconnues)

Le résultat précédent n'est pas applicable dans ce cas, car H est d'ordre $n < m$ et $H H^T = m \times m$ n'est pas régulière.

Grâce à l'identité remarquable :

$$(A + B C D)^{-1} = A^{-1} + A^{-1} B [C^{-1} + D A^{-1} B]^{-1} D A^{-1}$$

(3) se met sous la forme :

$$\begin{cases} \hat{x} = x^* + \hat{M} H^T \Phi^{-1} (y - H x^*) \\ \hat{M} = (M^{*-1} + H^T \Phi^{-1} H)^{-1} \end{cases}$$

En tenant compte du fait que nous n'avons aucune connaissance a priori de x^* , M^*

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \left(\frac{1}{\alpha} I + H^T \Phi^{-1} H \right)^{-1} \\ \hat{x} &= \hat{M} H^T \Phi^{-1} y \end{aligned}$$

Pour α très grand :

$$(4) \quad \begin{aligned} \hat{M} &= (H^T \Phi^{-1} H)^{-1} \\ \hat{x} &= (H^T \Phi^{-1} H)^{-1} H^T \Phi^{-1} y \end{aligned}$$

$$\hat{x} \text{ minimise } J = \|y - H x\|_{\Phi}^{-1}$$

$$\text{car } \frac{\partial J}{\partial x} = 2 H^T \Phi^{-1} y - 2 H^T \Phi^{-1} H x = 0 \quad \text{est satisfaite pour } \hat{x} \text{ obéissant à (4)}$$

Si on n'a aucune connaissance a priori de Φ , on peut prendre :

$$\Phi = \phi \times [1]$$

car il n'y a aucune raison de supposer les bruits corrélés, ni aucune des variances plus grande que l'autre.

(4) devient pour $\hat{x}$:

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T y = P_g y$$

P_g s'appelle la pseudo-inverse gauche

et $\hat{x}$ minimise la norme de $y - H x$.

Remarquons que :

$$P_g H = (H^T H)^{-1} H^T H = I$$

ce qui justifie le nom de pseudo-inverse gauche donné à P_g .

III - CONCLUSION -

La pseudo-inversion présente l'avantage d'être une opération algébrique dont les coefficients sont calculés hors ligne une fois pour toutes,

si le processus est stationnaire. Sa facilité de mise en oeuvre représente son avantage principal auprès de l'utilisateur.

Il convient toutefois de tenir compte des deux remarques suivantes :

1 - Les bruits de mesure ne sont pas filtrés, et sont transmis intégralement à l'organe élaborant la commande, puis au processus.

2 - Dans le cas (usuel) où la dimension du vecteur d'état est supérieure à celle du vecteur de mesure, il peut se produire que l'une des composantes de l'état n'apparaisse pas dans les équations de mesure [colonne de zéro dans la matrice H], tout en respectant l'hypothèse H de rang maximal. La mesure ne fournissant aucune information sur cette composante, qui peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre moins l'infini et plus l'infini, la solution de norme minimale pour cet état sera zéro [on peut vérifier qu'une colonne de zéro dans H se conserve lors des calculs conduisant à la pseudo-inverse droite].

Par conséquent, certains états peuvent ne pas participer à l'élaboration de la commande, ce qui peut compromettre la stabilité du système régulé, en particulier si ces états manquants représentent les premières dérivées de la sortie à réguler.

La prise en compte de l'équation dynamique :

$$\dot{x} = A x + D u$$

apporte un complément d'information sur le vecteur d'état x et conduit aux reconSTRUCTEURS dynamiques qui font l'objet des chapitres suivants.

IV - PROGRAMME REALISE -

1 - Description de la méthode

Les équations de mesure d'un processus étant :

$$y = H x$$

x de dimension n
 y de dimension m
 H de rang maximal

Suivant les dimensions du vecteur d'état et de mesure, il faudra calculer soit la matrice inverse de H , soit la pseudo-inverse droite, soit la pseudo-inverse gauche.

2 - Caractéristiques du programme

Programme mis au point sur RAX 360

Nom du programme : P I (E.N.S.M.)

But : Suivant les dimensions m et n d'une matrice H donnée de rang maximal, calculer l'inverse, la pseudo-inverse droite ou la pseudo-inverse gauche. Le cas H non de rang maximal est détecté.

Taille : 11.800 octets 360 pour H de dimension 20×20 .

Temps d'exécution : Pratiquement le temps d'impression pour les dimensions du vecteur d'état allant jusqu'à 20.

V - EXPERIMENTATION -

Les essais en simulation ont été effectués à partir des équations de notre générateur de vapeur. Le point intéressant de cet essai peut s'exprimer en termes de régulation classique : les oscillations, qui peuvent prendre naissance lors de la mise en oeuvre d'une régulation proportionnelle seule, sont atténuées par l'adjonction d'un terme dérivé (cf. figures 1-a et 1-b).

Modèle utilisé :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0.396 \times 10^{-3} x_4 - 0.325 \times 10^{-4} (m - x_5) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{154} [-(x_2 - 2) + 1.25 (x_4 - 80) - 0.1 (m - 1000) - x_3] \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{83} [-x_3 + 1.375 (x_5 - 40)] \\ \dot{x}_4 &= u_1 \\ \dot{x}_5 &= u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_4 \\ y_4 = x_5 \end{cases}$$

x_3 n'est donc pas mesuré.

m est une perturbation mesurée à chaque instant.

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - 1.225 \left(\frac{m}{1000}\right)^2 \\ e_2 = x_2 \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (e_2^2 + 16 e_1^2 + 30 u_1^2 + 30 u_2^2) dt$$

L'optimisation de ce processus nécessite la connaissance de x_3 .

Optimaliseur utilisé :

$$u_1 = \frac{1}{30} [-9.37 x_1 - 4.x_2 + 0.77 x_3 - 1.46 x_4 + 0.21 x_5 + 117.62]$$

$$u_2 = \frac{1}{30} [-19.8 x_1 + 1.33 x_2 - 0.544 x_3 + 0.211 x_4 - 0.73 x_5 + 37.48]$$

Pseudo-inverse droite :

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = H x$$

$$P_d = H^T (H H^T)^{-1}$$

$$P_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{array}{l|l} \hat{x}_1 & = y_1 \\ \hat{x}_2 & = y_2 \\ \hat{x}_3 & = 0 \\ \hline \hat{x}_4 & = y_3 \\ \hat{x}_5 & = y_4 \end{array}$$

ceci vérifie l'affirmation faite
en III - Conclusion.

Essais effectués :

La figure 1-a représente la figure de référence avec optimaliseur bouclé sur le modèle.

La figure 1-b représente les courbes obtenues avec estimation de l'état grâce à la pseudo-inverse, c'est-à-dire en faisant $\hat{x}_3 = 0$. Nous observons des oscillations car x_3 , homogène à la dérivée de x_2 , ne fait plus intervenir son effet stabilisant. Les transitoires sont altérées.

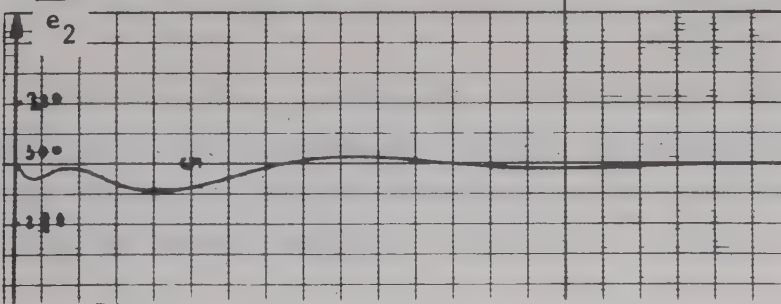
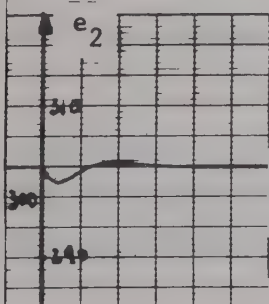
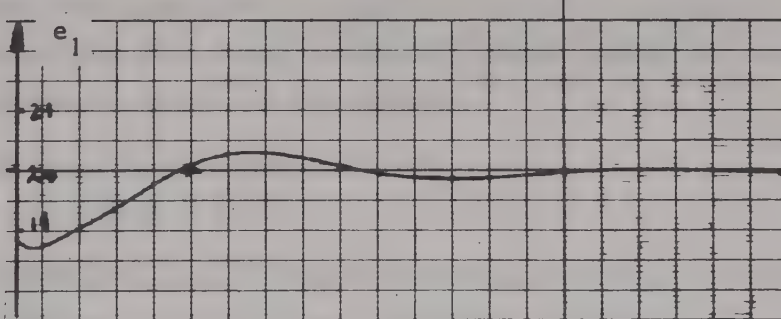
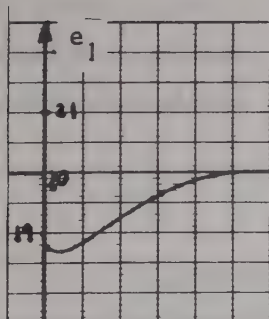
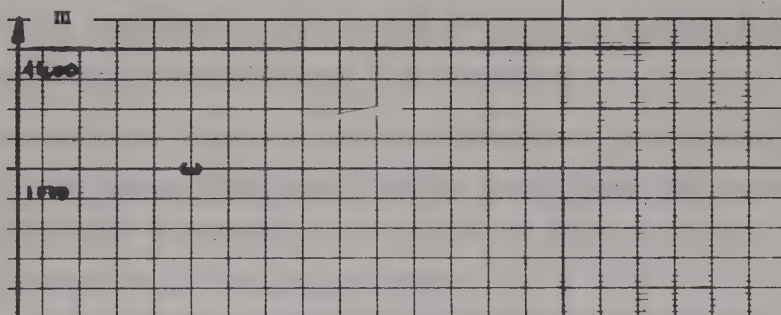
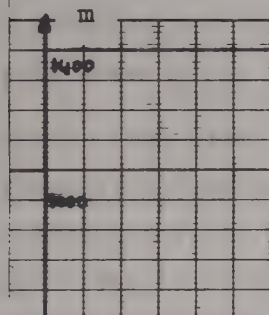
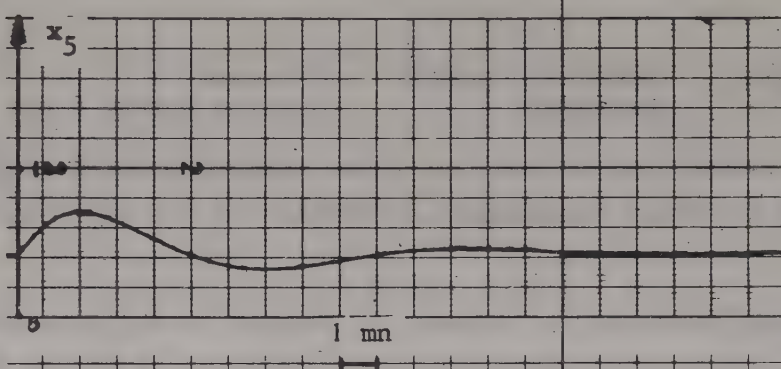
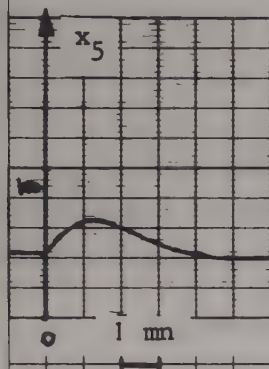
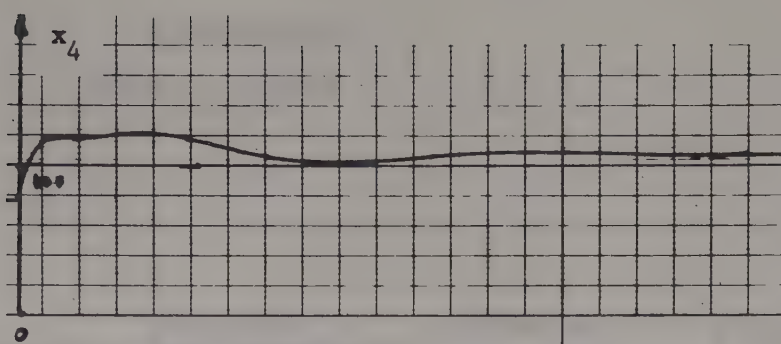
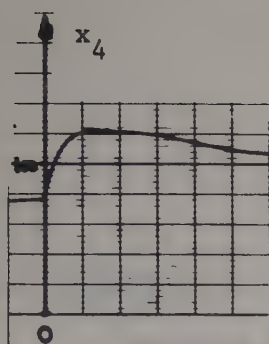


Fig. 1-a

Fig. 1-b

BIBLIOGRAPHIE

- [B.1] - Ph. De LARMINAT - "Estimation"
Cours d'A.E.A. d'automatique, E.N.S.M.
- [B.2] - TAKAHASHI, RABINS, - "Control"
AUSLANDER Addison Wesley - pp. 765-771

Chapitre 2

FILTRE DE KALMAN

I - INTRODUCTION -

Soit un processus décrit par les équations :

$$\begin{array}{lcl} (1) & \left| \begin{array}{l} \dot{x} = A x + D u \\ y = H x \end{array} \right. & \end{array}$$

Nous avons vu au chapitre précédent que l'utilisation des informations, fournies par le système algébrique (2) exclusivement, conduisait parfois à des résultats médiocres.

Une autre méthode consiste à utiliser uniquement les équations dynamiques (1), c'est-à-dire à mettre en parallèle le processus et son modèle, afin de prélever sur ce dernier les composantes du vecteur d'état. La validité de cette méthode est liée à la détermination exacte des équations (1).

En effet, le processus est soumis à des perturbations internes et externes, qui se produisent de façon aléatoire. D'autre part, tous les états du processus n'étant généralement pas mesurables, le modèle se verra attribuer des conditions initiales différentes de celles du processus.

Une solution, intuitive du point de vue de l'automatique, consiste à utiliser un modèle obéissant aux équations (1), tout en faisant intervenir les équations (2) par l'intermédiaire d'un terme correctif tenant compte des écarts entre les sorties du processus et celles de son modèle.

Ce reconstructeur aura la structure suivante :

$$\hat{\dot{x}} = A \hat{x} + D u + K (y - H \hat{x})$$

La théorie de KALMAN consiste à trouver K optimal, compte tenu des caractéristiques statistiques des bruits et des conditions initiales.

Cette théorie est applicable aussi bien dans le cas d'équations discrètes que continues.

Toutefois, nous insisterons, dans ce chapitre, sur la version discrète, en explicitant et en décomposant le cycle estimation - prédiction et en indiquant les raisons qui doivent motiver le choix de l'une ou l'autre forme d'équations possibles lors de la mise en oeuvre pratique.

II - FILTRE DE KALMAN DISCRET -

Notations :

$$\begin{cases} x_{t+1} = P_t x_t + Q_t u_t + x_t + \delta_t \\ y_t = H_t x_t + \mu_t + \delta'_t \end{cases}$$

δ_t et δ'_t séquences aléatoires gaussiennes centrées indépendantes

$$\begin{aligned} E(\delta_i \delta_j^T) &= 0 & i \neq j & & E(\delta_t) &= 0 \\ &= \phi_t & i = j = t & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\delta'_i \delta'_j^T) &= 0 & i \neq j & & E(\delta'_t) &= 0 \\ &= \phi'_t & i = j = t & \end{aligned}$$

$$E(\delta_i \delta'_j^T) = 0 \quad \forall i, j \quad \delta \text{ et } \delta' \text{ indépendantes de } X$$

x_t et μ_t sont des perturbations mesurées.

$$(1) \quad \begin{cases} X_{t+1}^* = \text{prédiction de } X \text{ à l'instant } t+1, \text{ connaissant toutes les informations jusqu'à } t \text{ et en particulier la mesure } y_t. \\ X_{t+1}^* = E(X_{t+1}/y_t) = E(P_t x_t + Q_t u_t + x_t + \delta_t / y_t) \\ M_{t+1}^* = E\{(X_{t+1} - X_{t+1}^*)(X_{t+1} - X_{t+1}^*)^T\} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \hat{X}_{t+1} = \text{estimation de } X \text{ à l'instant } t+1, \text{ connaissant toutes les informations jusqu'à } t+1 \text{ et en particulier la mesure } y_{t+1}. \\ \hat{X}_{t+1} = E(X_{t+1}/y_{t+1}) \\ \hat{M}_{t+1} = E\{(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1})(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1})^T\} \end{cases}$$

Compte tenu de (2), (1) s'écrit :

$$(P) \quad \begin{cases} X_{t+1}^* = P_t \hat{X}_t + Q_t u_t + x_t \\ M_{t+1}^* = E\{[P_t(X_t - \hat{X}_t) + \delta_t][P_t(X_t - \hat{X}_t) + \delta_t]^T\} = P_t \hat{M}_t P_t^T + \phi_t \end{cases}$$

Equations du filtrage

Les équations classiques (Annexe) d'estimation d'une variable aléatoire X_t conditionnellement à une variable y_t sont :

$$\begin{cases} \hat{X}_t = X_t^* + M_{Xy}^* (M_{yy}^*)^{-1} (y_t - H_t X_t^* - \mu_t) \\ \hat{M}_{XX}^t = M_{XX}^* - M_{Xy}^* (M_{yy}^*)^{-1} M_{Xy}^{*T} \end{cases}$$

avec $M_{XtY}^* = E[(X_t - X_t^*)(y_t - y_t^*)^T / y_{t-1}] = M_{XtX}^* H_t^T$

car $y_t - y_t^* = H_t X_t + \mu_t + \delta_t' - E(H_t X_t + \mu_t + \delta_t' / y_{t-1}) = H_t (X_t - X_t^*) + \delta_t'$

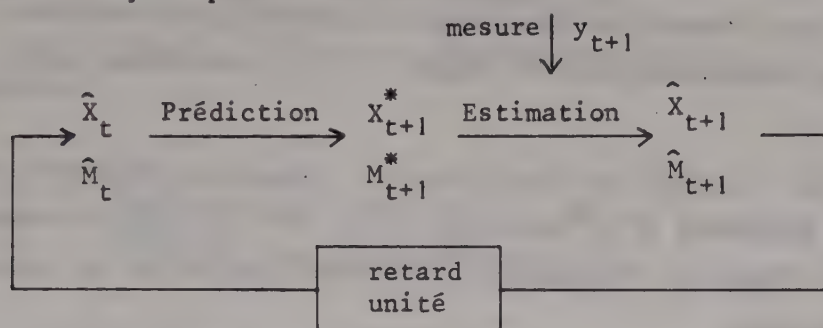
$$M_{YtY}^* = E[(y_t - y_t^*)(y_t - y_t^*)^T / y_{t-1}] = E\left[\left[H_t(X_t - X_t^*) + \delta_t'\right] \left[H_t(X_t - X_t^*) + \delta_t'\right]^T\right]$$

$$= H_t M_{XtX}^* H_t^T + \phi_t'$$

d'où (en posant $M_{XtX}^* = M_t^*$) :

(E)
$$\begin{cases} \hat{X}_{t+1} = X_{t+1}^* + M_{t+1}^* H_{t+1}^T (H_{t+1} M_{t+1}^* H_{t+1}^T + \phi_{t+1}')^{-1} (y_{t+1} - H_{t+1} X_{t+1}^* - \mu_{t+1}) \\ \hat{M}_{t+1} = M_{t+1}^* - M_{t+1}^* H_{t+1}^T (H_{t+1} M_{t+1}^* H_{t+1}^T + \phi_{t+1}')^{-1} H_{t+1} M_{t+1}^* \end{cases}$$

(P) et (E) sont les formules de Prédiction et d'Estimation et leur emploi consécutif donne le cycle prédiction - estimation :



- en partant de $\hat{X}_0, \hat{M}_0, \phi_t, \phi_t'$ donnés, on peut connaître $\hat{X}_t, \hat{M}_t, \psi_t$.

Il existe diverses manières de présenter ces résultats. Il faut toutefois noter que le calcul de $\hat{M}_t$ ne nécessite en aucune manière la connaissance de $\hat{X}_t$ ou d'un X quelconque. Ce calcul peut donc être fait séparément, et même hors ligne, à condition de stocker les résultats, c'est-à-dire les $\hat{M}_t$ qui serviront dans la détermination de $\hat{X}_t$.

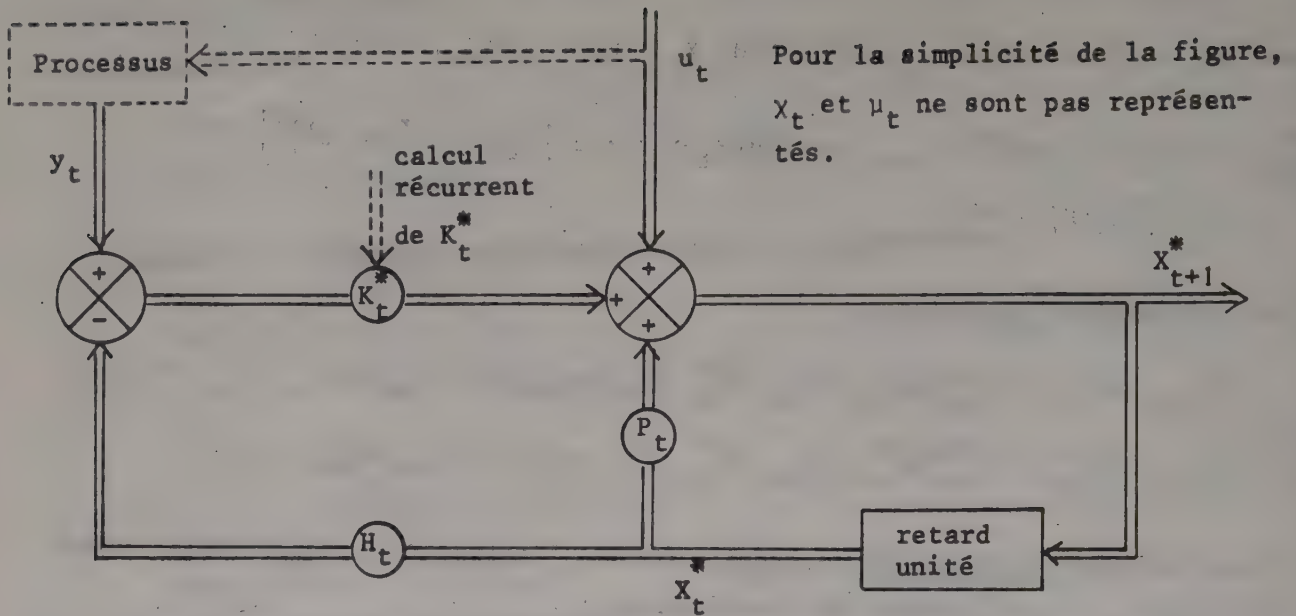
1 - Récurrence entre les grandeurs * (Filtre prédicteur)

$$X_{t+1}^* = P_t X_t^* + Q_t u_t + \chi_t + K_t^* (y_t - H_t X_t^* - \mu_t) \quad X_0^* = 0$$

$$K_t^* = P_t M_t^* H_t^T (H_t M_t^* H_t^T + \phi_t')^{-1}$$

$$M_{t+1}^* = P_t M_t^* P_t^T - K_t^* H_t M_t^* P_t^T + \phi_t \quad M_0^* = E[X_0 X_0^T]$$

a - Cette représentation est satisfaisante dans la mesure où l'estimateur peut être considéré comme étant le modèle du processus, corrigé par l'écart entre le modèle et le processus.



P_t , Q_t et H_t sont connus par hypothèse (en général stationnaires). K_t^* est calculé de façon récurrente, soit en ligne, soit au préalable, puis stocké.

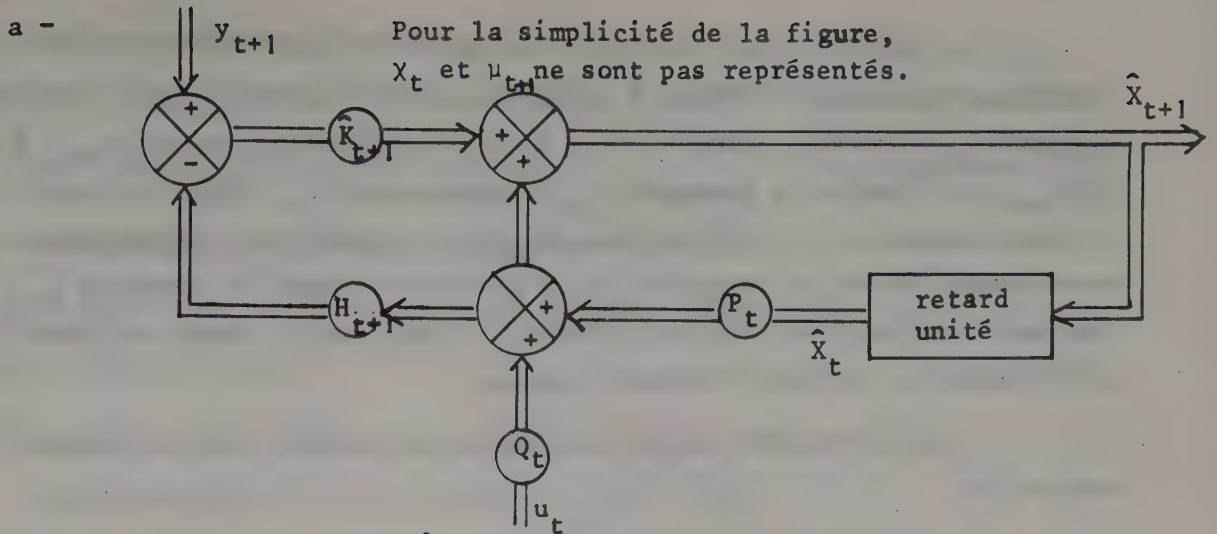
Dans la cas où le modèle est stationnaire, l'équation récurrente en M_t^* tend vers un régime permanent M . K_t^* tend donc aussi vers un régime permanent K^* . La programmation en ligne de l'estimateur ne tiendra compte que de cette valeur de K^* de régime permanent.

b - Toutefois x_{t+1}^* ne tient compte que de la mesure y_t , ignorant la mesure y_{t+1} qui a pourtant été prélevée.

2 - Récurrence entre les grandeurs $\hat{\cdot}$ (Filtre estimateur)

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{t+1} &= P_t \hat{x}_t + Q_t u_t + \chi_t + \hat{k}_{t+1} [y_{t+1} - H_{t+1} (P_t \hat{x}_t + Q_t u_t + \chi_t) - \mu_{t+1}] \\
 M_{t+1}^* &= P_t \hat{M}_t P_t^T + \phi_t \\
 \hat{k}_{t+1} &= M_{t+1}^* H_{t+1}^T (H_{t+1} M_{t+1}^* H_{t+1}^T + \phi_{t+1}')^{-1} \quad \text{Remarque : } [K_{t+1}^* = P_{t+1} \hat{k}_{t+1}] \\
 \hat{M}_{t+1} &= M_{t+1}^* - \hat{k}_{t+1} H_{t+1} M_{t+1}^* = (I - \hat{k}_{t+1} H_{t+1}) M_{t+1}^*
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Initialisation $\hat{x}_0 = 0$ et $\hat{M}_0 = E[x_0 x_0^T]$



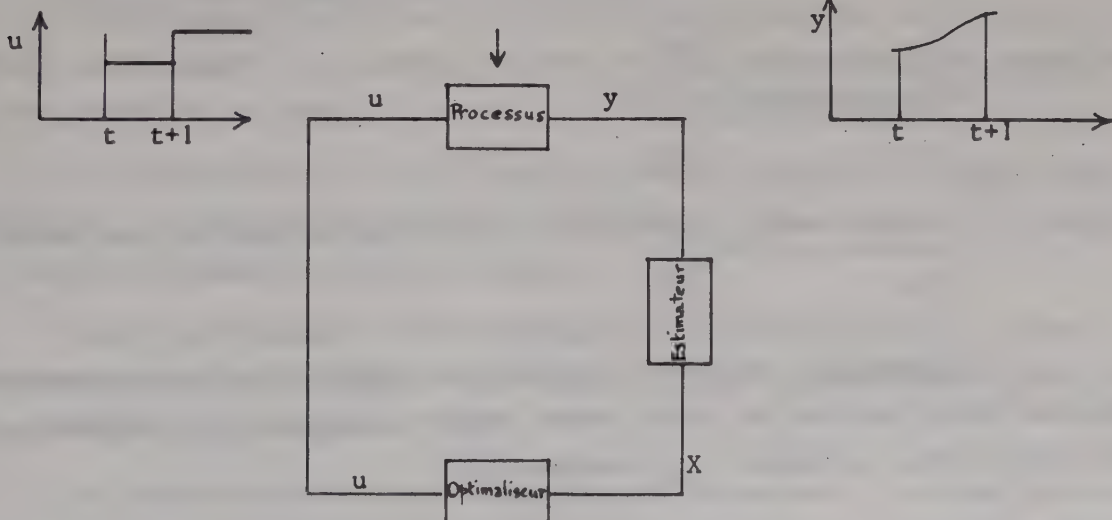
Si on se donne ϕ_t , ϕ'_t , $\hat{M}_t$, les équations (3) donnent successivement M_{t+1}^* , $\hat{K}_{t+1}$ et $\hat{M}_{t+1}$. Si toutes les matrices sont stationnaires, au bout de n itérations $\hat{M}_n$ tend vers un régime permanent $\hat{M}$.

Donc, M_n^* tend vers un régime permanent M et $\hat{K}_n$ tend vers un régime permanent K .

b - Connaissant la valeur de $\hat{K}_t$, on peut connaître K_t^* par $K_t^* = P_t \hat{K}_t$.
L'inverse n'est évidemment vrai que si P_t est inversible.

c - $\hat{x}_{t+1}$ tient compte de la mesure y_{t+1} ; c'est donc la meilleure valeur que l'on puisse attribuer à x au temps $t+1$.

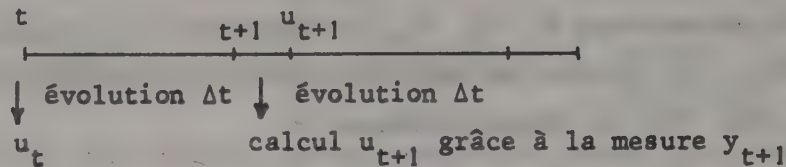
3 - Préférence de l'une ou l'autre relation



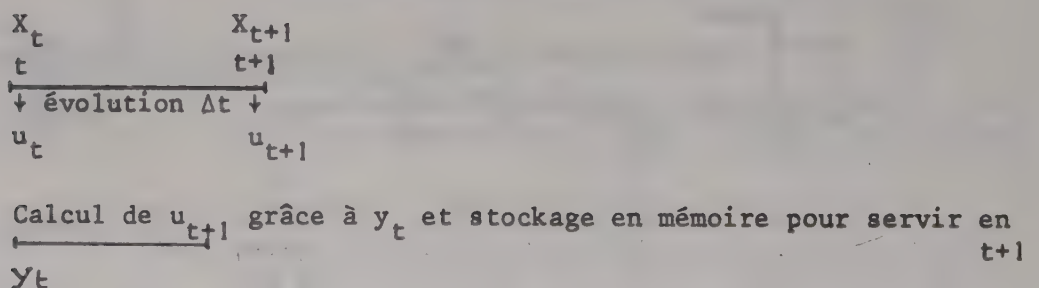
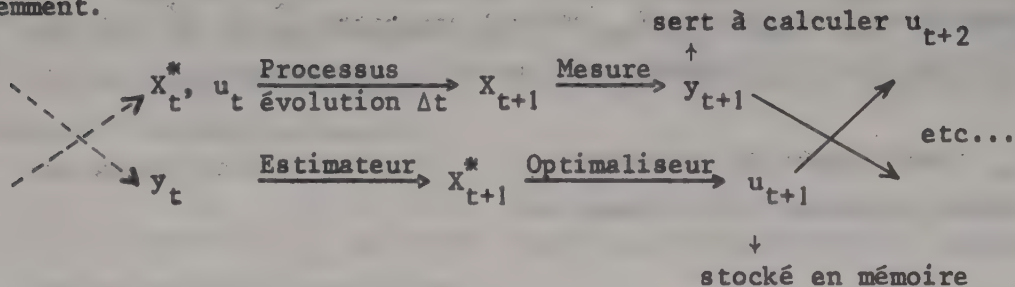
a) $u_t, \hat{x}_t \xrightarrow[\text{évolution}]{\text{Processus}} x_{t+1} \xrightarrow{\text{Mesure}} y_{t+1} \xrightarrow{\text{Estimateur}} \hat{x}_{t+1} \xrightarrow{\text{Optimaliseur}} u_{t+1}$

Le processus est continu. Nous avons un bloqueur d'ordre zéro sur la commande - un échantillonnage à la sortie. Si on injecte u_t et $\hat{X}_t$ au processus au temps t , il évolue jusqu'à $t+1$; à $t+1$ on prélève la mesure y_{t+1} . A partir de y_{t+1} , on élabore la commande u_{t+1} , connaissant $\hat{X}_{t+1}$. Mais ce calcul (entre la connaissance de y_{t+1} et celle de u_{t+1}) doit être fait instantanément, car nous sommes rendus au temps $t+1$ et le processus attend sa commande u_{t+1}^+ pour évoluer. Pour que ceci soit applicable, il faut que le temps de calcul soit petit devant la période d'échantillonnage.

- Si le temps de calcul est petit, on utilise donc la formule d'estimation (2)



- Si le temps de calcul est long, on utilise la formule de prédiction, en effectuant des calculs en parallèle et non pas séquentiellement comme précédemment.



b) Remarque : Dans les deux cas, on a décrit le cycle estimation - prédiction. Mais, dans un cas, on s'arrête avant la mesure y_{t+1} (prédiction) et, dans l'autre, après la mesure y_{t+1} (estimation).

III - FILTRE DE KALMAN CONTINU -

Dans le cas continu, les cycles d'estimation et de prédiction sont confondus.

Pour un processus d'équation :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t) X(t) + D(t) u(t) + R_1(t) + \delta(t) & \delta \text{ de covariance } \Phi(t) \\ y(t) = H(t) X(t) + \mu(t) + \delta'(t) & \delta' \text{ de covariance } \Phi'(t) \end{cases}$$

Les équations du filtre de KALMAN continu sont :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = A(t) \hat{X}(t) + D(t) u(t) + R_1(t) + K(t) [y(t) - H(t) \hat{X}(t) - \mu(t)] \\ \dot{K}(t) = M(t) H^T(t) [\Phi'(t)]^{-1} \\ \dot{M}(t) = A(t) M(t) + M(t) A^T(t) - M(t) H^T(t) [\Phi'(t)]^{-1} H(t) M(t) + \Phi(t) \end{cases}$$

Initialisation $\hat{X}(0) = 0$ et $M(0) = E [X(0) X^T(0)]$

IV - CONCLUSION -

Les avantages de ce reconstituteur dynamique résident dans le fait que, d'une part, il élabore un vecteur $\hat{X}$ qui est optimal dans le sens de la minimisation de $E(X - \hat{X})^2$, et que, d'autre part, il filtre les bruits provenant de la mesure des sorties du processus, ce qui a pour effet de réaliser une commande "lisse". Des considérations d'ordre financier décideront du choix entre un filtre analogique et un filtre numérique. En effet, la dimension du reconstituteur augmentant proportionnellement à la dimension du vecteur d'état, une implantation numérique se justifiera d'autant plus que la dimension du problème à traiter croît. Dans les deux cas, l'utilisateur se heurtera à une difficulté d'ordre pratique : quantifier les caractéristiques statistiques des bruits δ et δ' .

Cette quantification est surtout difficile pour les bruits δ qui englobent généralement les écarts ϵ dus aux erreurs inhérentes à la détermination des paramètres du modèle.

Il faut noter alors que l'application des théories de KALMAN n'est pas légitime, du fait que ces écarts ϵ dépendent de l'état x et de la commande u , et sont généralement de valeur moyenne non nulle.

Mais, pratiquement, l'utilisateur est toujours placé dans ce cas, donc le bruit δ inclut un bruit ϵ pour lequel on peut difficilement parler de caractéristiques statistiques.

Le chapitre suivant décrit une méthode permettant d'estimer les caractéristiques statistiques des bruits et de reconstruire le vecteur d'état.

V - PROGRAMMES REALISES -

Dans le cas d'un processus stationnaire, la matrice de covariance du vecteur d'état M_t tend vers un régime permanent M , donc la matrice de gain K_t du filtre tend vers un régime permanent K .

Nous pouvons calculer hors ligne cette valeur constante du gain, puis l'utiliser dans l'équation récurrente utilisée en ligne pour estimer le vecteur d'état.

A - Calcul du gain du filtre

1 - Description de la méthode

Connaissant le modèle mathématique du processus sous forme discrète et en se donnant les matrices de covariance Φ et Φ' des bruits d'équation et de mesures, nous calculons les matrices de gain K^* (récurrence entre les grandeurs $*$) et $\hat{K}$ (récurrence entre les grandeurs $\wedge$). M^* et $\hat{M}$ sont calculés au cours des calculs intermédiaires.

Dans le cas d'un système stationnaire, les équations récurrentes utilisées sont, pour les deux types de filtres présentés :

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} M_{t+1}^* = P \hat{M}_t P^T + \Phi \\ \hat{K}_{t+1} = M_{t+1}^* H^T (H M_{t+1}^* H^T + \Phi')^{-1} \\ K_{t+1}^* = P \hat{K}_{t+1} \\ \hat{M}_{t+1} = M_{t+1}^* - \hat{K}_{t+1} H M_{t+1}^* = (1 - \hat{K}_{t+1} H) M_{t+1}^* \end{array} \right.$$

2 - Description du programme

Le programme fonctionne sur 1130 et 360. Le programme principal MATCO est constitué de la partie lecture et écriture des données. Il appelle le sous programme COVAR qui retranscrit les équations encadrées (1).

Il y a arrêt de l'ordinateur :

- soit lorsque la convergence est réalisée,
- soit lorsqu'on atteint le nombre maximum d'itérations qu'on s'était fixé.

Test de convergence

On effectue la différence termes à termes entre $\hat{M}_{n+1}$ et $\hat{M}_n$. Si pour tous les termes cette différence en valeur relative est inférieure à une pré-

cision e, la convergence est réalisée. Il existe une protection contre les termes nuls ou trop petits pour éviter les divisions par zéro.

3 - Caractéristiques du programme

Nom du programme : MATCO

But : Calcul de la matrice de gain du filtre de KALMAN, les équations discrètes du processus et les caractéristiques statistiques des bruits étant données.

Taille : 3500 mots 1130 pour $m = n = 10$

B - Estimation en ligne du vecteur d'état

1 - Description de la méthode [Programme réalisé sur calculateur numérique 640 EAI]

Connaissant la mesure y_{t+1} , la commande u_t et le gain $\hat{K}$ du filtre, l'équation récurrente donnant $\hat{X}$ est :

$$\hat{X}_{t+1} = P \hat{X}_t + Q u_t + \chi + \hat{K} [y_{t+1} - H (P \hat{X}_t + Q u_t + \chi) - \mu]$$

Le programme représente la transcription de cette relation. Les données P , Q , χ , H , μ sont inscrites dans le programme. y et u sont lus sur des convertisseurs analogiques digitaux A D C. La matrice $\hat{K}$ est aussi lue sur des A D C, afin de pouvoir "retoucher", grâce à des potentiomètres, les valeurs trouvées hors ligne. A cette fin, les calibres de K sont aussi variables et peuvent être changés en ligne.

Le vecteur $\hat{X}_{t+1}$ calculé est renvoyé sur des convertisseurs digitaux analogiques D A M.

Le programme est présenté sous forme de sous programme fonctionnant sur interruption.

2 - Description du sous programme

Nom : LOR

But : Estimer le vecteur d'état d'un processus. Actuellement est conçu pour un problème à 5 états et 2 mesures.

Taille : 4600 mots 640.

VI - ESSAIS EN SIMULATION -

Le modèle mathématique du processus étant montré sur TR 48, nous avons estimé le vecteur d'état :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

après avoir au préalable calculé hors ligne la matrice de gain $\hat{K}$.

A - Equations

1 - Continues :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0.337 \times 10^{-4} x_4 + 0.410 \times 10^{-3} u_1 + 0.337 \times 10^{-4} u_2 - 0.337 \times 10^{-1} + w_1 \\ \dot{x}_2 &= -0.6667 \times 10^{-2} x_2 - 0.6667 \times 10^{-2} x_3 - 0.5333 \times 10^{-3} x_4 \\ &\quad + 0.1 \times 10^{-1} u_1 - 0.78 + w_2 \\ \dot{x}_3 &= -0.2 \times 10^{-1} x_3 + 0.12 \times 10^{-1} u_2 - 0.48 + w_3 \\ \dot{x}_4 &= 0 + w_4 \\ \dot{x}_5 &= 0 + w_5 \end{aligned}$$

Mesures :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 0.16 \times 10^{-2} x_4 - 0.8 + v_1 \\ y_2 &= x_2 + x_5 + v_2 \end{aligned}$$

2 - Discrètes :

Période d'échantillonnage $\Delta t = 10$ s

$$\begin{aligned} x_1 \text{ t+1} &= x_1 \text{ t} - 0.337 \times 10^{-3} x_4 \text{ t} + 0.410 \times 10^{-2} u_1 \text{ t} + 0.337 \times 10^{-3} u_2 \text{ t} - 0.337 + w_1 \text{ t} \\ x_2 \text{ t+1} &= 0.9355 x_2 \text{ t} - 0.5839 \times 10^{-1} x_3 \text{ t} - 0.516 \times 10^{-2} x_4 \text{ t} \\ &\quad + 0.9674 \times 10^{-1} u_1 \text{ t} - 0.3663 \times 10^{-2} u_2 \text{ t} - 7.4 + w_2 \text{ t} \\ x_3 \text{ t+1} &= 0.8187 x_3 \text{ t} + 0.1087 u_2 \text{ t} - 4.35 + w_3 \text{ t} \\ x_4 \text{ t+1} &= x_4 \text{ t} + w_4 \text{ t} \\ x_5 \text{ t+1} &= x_5 \text{ t} + w_5 \text{ t} \end{aligned}$$

Mesures :

$$\begin{cases} y_{1t} = x_{1t} - 0.16 \times 10^{-2} x_{4t} - 0.8 + v_{1t} \\ y_{2t} = x_{2t} + x_{5t} + v_{2t} \end{cases}$$

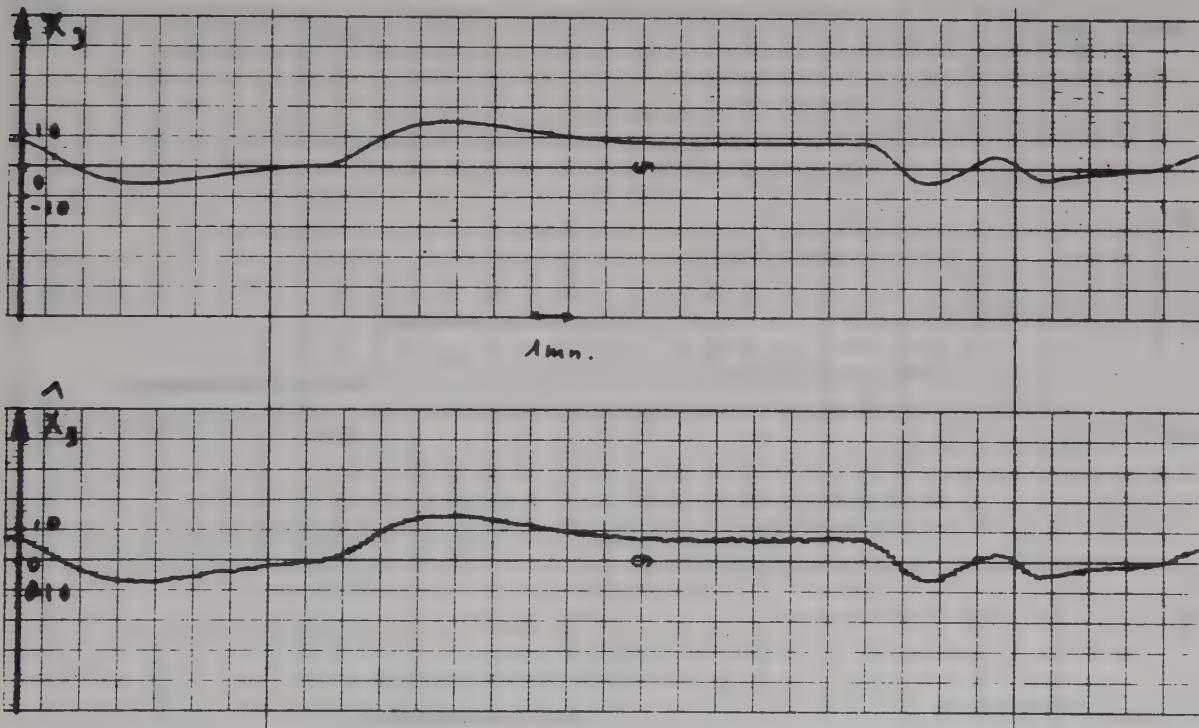
B - Matrice de gain calculée hors ligne

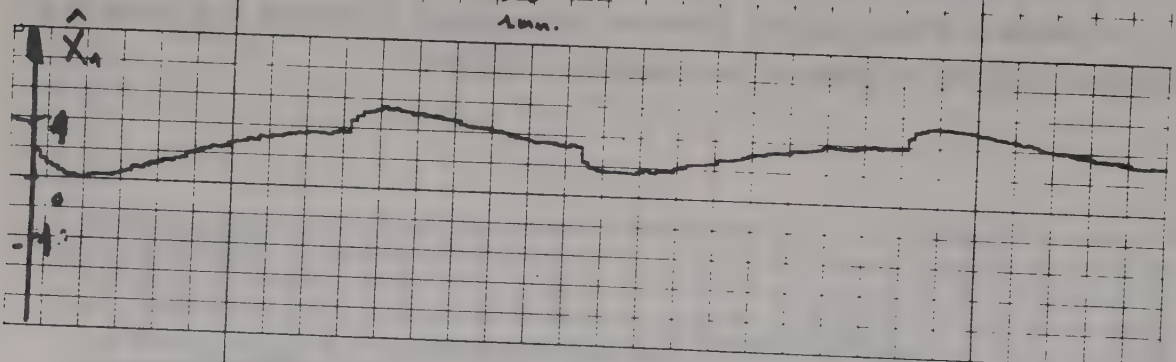
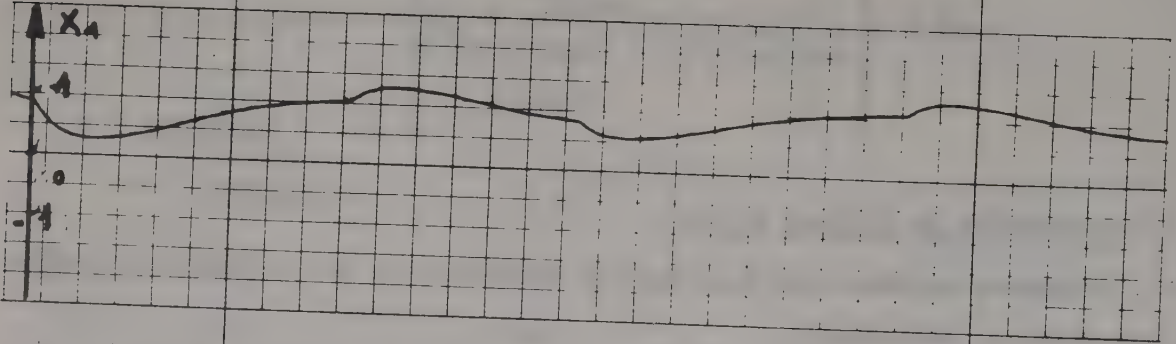
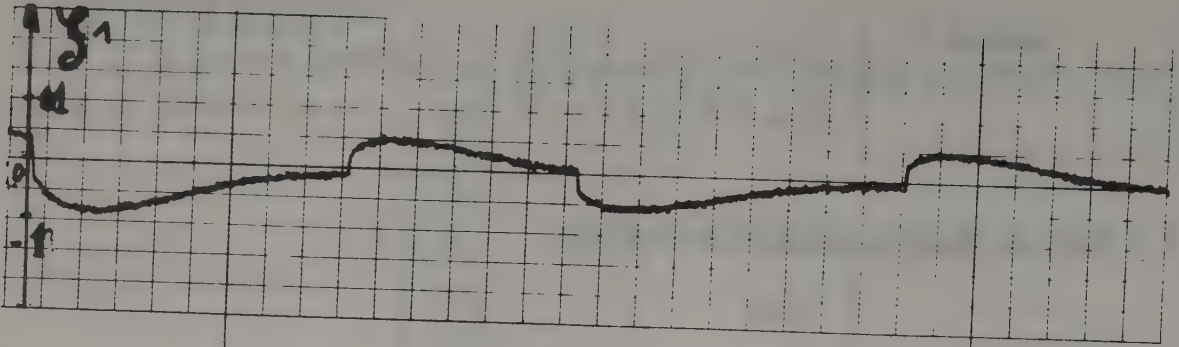
$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0.69 & 0 \\ 0 & 1.2 \\ 0 & -0.87 \\ -0.39 \times 10^3 & 0.81 \times 10^{-2} \\ 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$

C - Estimation du vecteur d'état

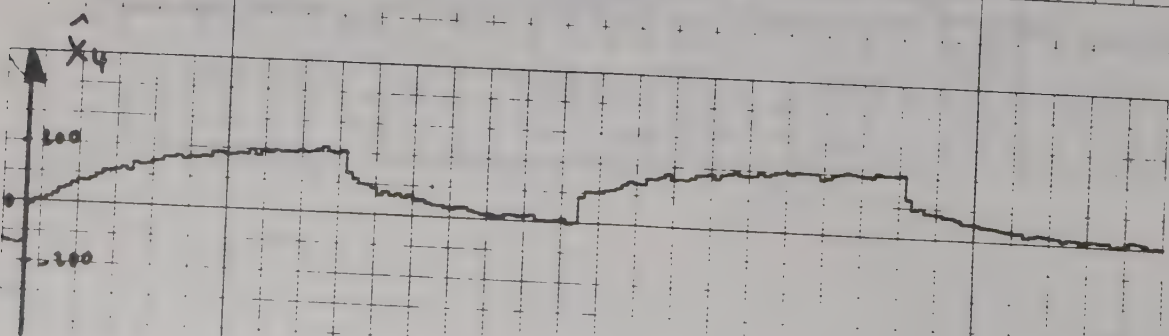
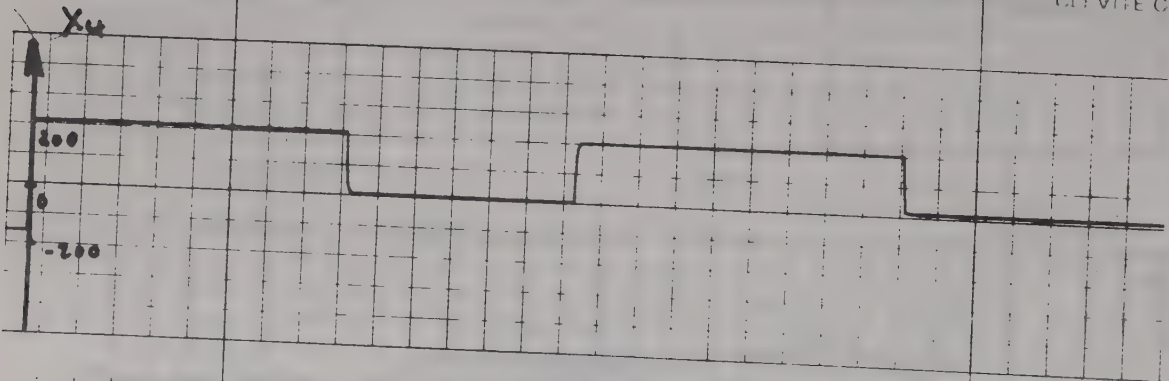
Le modèle mathématique continu est câblé sur TR 48. Il est bouclé afin de ne pas aller en saturation.

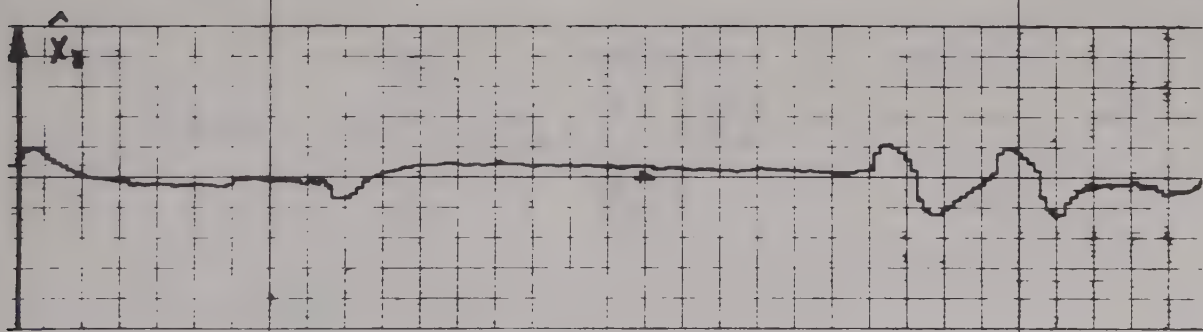
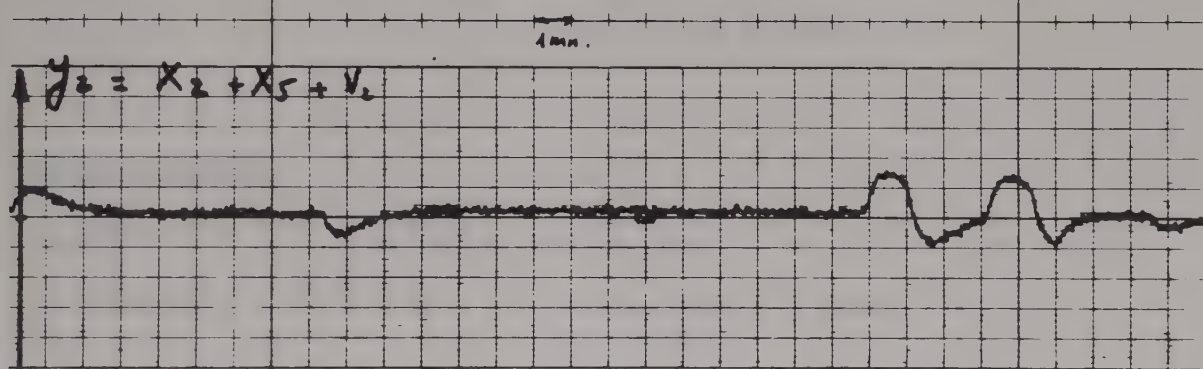
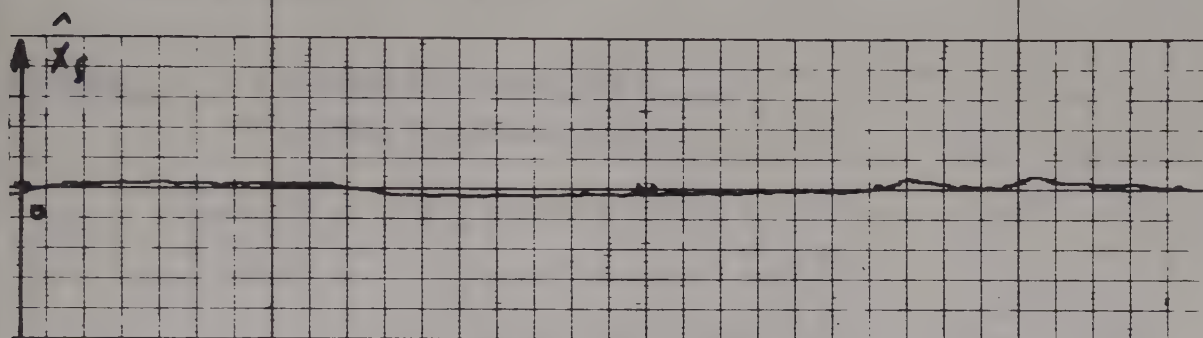
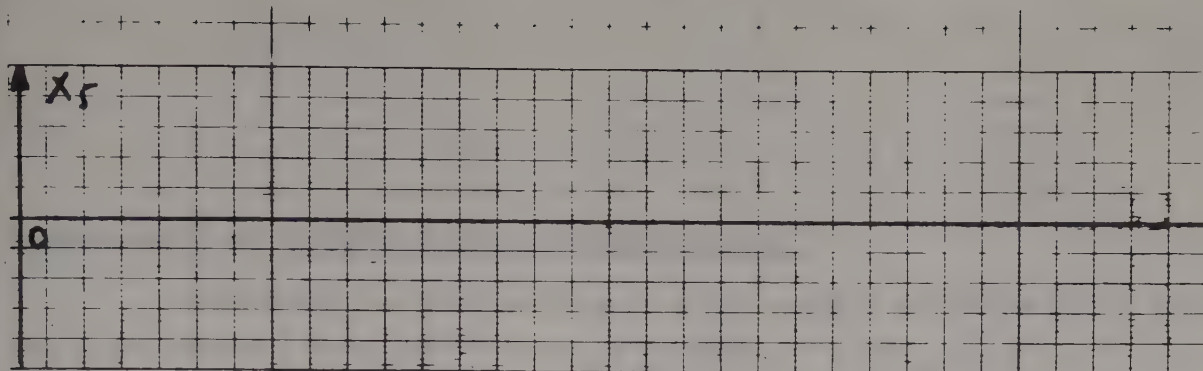
Le vecteur d'état estimé grâce au calculateur numérique est tracé sur le traceur de courbes et comparé aux variables réelles.





OLE VITE CO





Estimation d'une variable aléatoire X connaissant Y

Connaissant les réalisations y de la variable aléatoire Y , on cherche l'estimation $\hat{X}$ de X qui minimise le critère $J = E\{\sum (X_i - \hat{X}_i)^2\}$.

On s'imposera : $\hat{X} = KY + b$

Notations : X vecteur à n dimensions

Y vecteur à m dimensions

$$\begin{aligned} X^* &= E(X) & M_{xx}^* &= E\{(X - x^*) (X - x^*)^T\} \\ y^* &= E(Y) & M_{yy}^* &= E\{(Y - y^*) (Y - y^*)^T\} \\ & & M_{xy}^* &= E\{(X - x^*) (Y - y^*)^T\} \\ & & M_{yx}^* &= E\{(Y - y^*) (X - x^*)^T\} \end{aligned}$$

Calcul de b et K

$$J = \text{Trace } E\{(X - \hat{X}) (X - \hat{X})^T\}$$

$$= \text{Trace } E\{[(X - x^*) - K(Y - y^*) - b + x^* - K y^*] [\text{idem}]^T\}$$

$$= \text{Trace } [M_{xx}^* - M_{xy}^* K^T - K M_{yx}^* + K M_{yy}^* K^T + (-b + x^* - K y^*) \times (-b + x^* - K y^*)^T]$$

$$\text{Posons : } K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} ; M_{xy}^* = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = M_{yx}^{*T}$$

$$\begin{aligned} J &= \text{Tr } (M_{xx}^*) + \sum_{i=1}^n (K_i M_{yy}^* K_i^T - 2 K_i M_i^{*T}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-b_i + x_i^* - K_i y^*)^2 \end{aligned}$$

Le dernier terme de J étant une somme de carrés, sa valeur minimale est zéro.

Nous aurons donc : $b = x^* - K y^*$

Il reste donc à minimiser :

$$J = \text{Tr} (M_{xx}^*) + \sum_{i=1}^n (K_i M_{yy}^* K_i^T - 2 K_i M_i^{*T})$$

par rapport à K.

C'est-à-dire qu'il faut annuler :

$$J_K = \frac{\partial J}{\partial k_{ij}} \quad \text{avec } K = \{k_{ij}\}$$

ce qui entraîne :

$$2 K M_{yy}^* - 2 M_{xy}^* = 0$$

soit : $K = M_{xy}^* M_{yy}^{*-1}$

$$\hat{X} = x^* + M_{xy}^* M_{yy}^{*-1} (Y - y^*)$$

Calcul de $\hat{M}_{xx}$

$$\begin{aligned} \hat{M}_{xx} &= E\{(X - \hat{X})(X - \hat{X})^T\} \\ &= E\{[(X - x^*) - K(Y - y^*)][(X - x^*) - K(Y - y^*)]^T\} \\ &= M_{xx}^* - K M_{yx}^* - M_{xy}^* K^T + K M_{yy}^* K^T \\ &= M_{xx}^* - M_{xy}^* M_{yy}^{*-1} M_{yx}^* - M_{xy}^* (M_{yy}^*)^{-1T} (M_{xy}^*)^T \\ &\quad + M_{xy}^* M_{yy}^{*-1} M_{yy}^* (M_{yy}^*)^{-1T} (M_{xy}^*)^T \\ &= M_{xx}^* - M_{xy}^* M_{yy}^{*-1} M_{yx}^* \quad \text{car } M_{yy} \text{ symétrique} \end{aligned}$$

$$\hat{M}_{xx} = M_{xx}^* - M_{xy}^* M_{yy}^{*-1} M_{yx}^*$$

Remarque :

On montre que, lorsque les variables sont gaussiennes, nous avons $\hat{X} = E(X/Y)$ = espérance de X conditionnellement à Y. Dans le cas général, $E(X/Y)$ n'est pas forcément linéaire.

Les relations précédentes étant vraies quel que soit t , nous pouvons écrire :

$$\hat{X}_t = x_t^* + M_{XtY}^* (M_{YtY}^*)^{-1} (y_t - y_t^*)$$

$$\hat{M}_{x^*x}^* - M_{x^*x}^* - M_{x^*y}^* (M_{y^*y}^*)^{-1} M_{x^*y}^{*T}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [B.1] - Ph. De LARMINAT - "Estimation"
Cours d'A.E.A. d'Automatique
E.N.S.M.

Chapitre 3

ESTIMATION DES VARIANCES

I - INTRODUCTION -

L'application de la théorie de KALMAN exposée au chapitre précédent suppose obligatoirement que les matrices de covariance des bruits sont connues.

Pour ce faire, une nouvelle méthode a été mise au point au Laboratoire d'Automatique de Nantes [B.1].

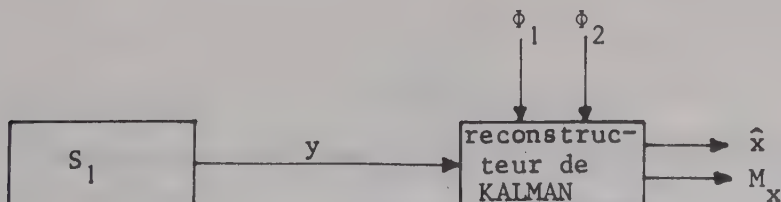
Nous donnerons dans ce chapitre l'idée maitresse de cette méthode qui a conduit à "l'algorithme d'estimation des variances", ainsi que son application à un système monovarié.

II - METHODE -

1 - Rappelons au préalable que dans le cas d'un processus donné par les équations suivantes :

$$S_1 \quad \begin{cases} x_{k+1} = p x_k + \delta_{1k} \\ y_k = h x_k + \delta_{2k} \end{cases}$$

δ_1 et δ_2 étant des séquences aléatoires gaussiennes centrées indépendantes, de variances ϕ_1 et ϕ_2 , un reconstituteur de KALMAN permettrait, grâce à des équations récurrentes, de calculer à chaque instant d'échantillonnage la variable d'état estimée $\hat{x}$ et sa variance conditionnelle $M_x = E \{ (x - \hat{x})^2 \}$, connaissant y , ϕ_1 et ϕ_2 .



2 - v étant une variable aléatoire quelconque, $\hat{v}$ une estimation optimale linéaire de v , posons : $\tilde{v} = v - \hat{v}$

afin de procéder au calcul suivant :

$$\begin{aligned} E(v_k^2) &= E(\tilde{v}_k + \hat{v}_k)^2 \\ &= E(\tilde{v}_k^2) + 2 E(\tilde{v}_k \hat{v}_k) + E(\hat{v}_k^2) \end{aligned}$$

D'après le principe d'orthogonalité :

$$E(\tilde{v}_k \hat{v}_k) = E[(v_k - \hat{v}_k) (\hat{v}_k)] = 0$$

Soit, finalement :

$$(1) \quad E(v_k^2) = E(\hat{v}_k^2) + E[(v_k - \hat{v}_k)^2]$$

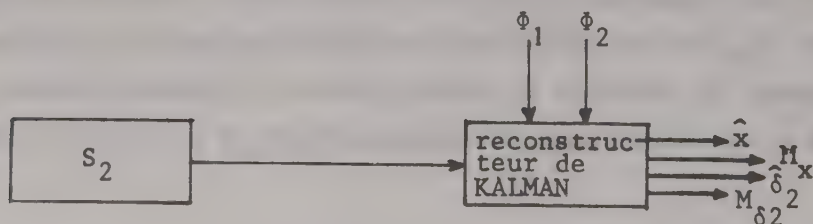
3 - Pour plus de simplicité, dans l'exposé nous ne traitons provisoirement que le problème de la détermination de ϕ_2 , supposant ϕ_1 connu.

Considérons le système suivant :

$$S_2 \quad \begin{cases} x_{k+1} = p x_k + \delta_{1k} \\ \delta_{2k+1} = \delta'_{2k} \\ y_k = h x_k + \delta_{2k} \end{cases}$$

En d'autres termes, nous introduisons δ_2 comme variable d'état. Le système ci-dessus est équivalent au système primitif si δ'_2 est une variable aléatoire indépendante de variance ϕ_2 .

Si ϕ_1 et ϕ_2 sont connus, le filtre de KALMAN permet une estimation de δ_2



Appliquons la relation (1) à l'état δ_2 :

$$E[(\delta_{2k})^2] = E(\hat{\delta}_{2k})^2 + E[(\delta_{2k} - \hat{\delta}_{2k})^2]$$

δ_2 étant centrée :

$$\phi_2 = E(\hat{\delta}_{2k})^2 + M_{\delta 2k}$$

Notons :

$$(2) \quad \hat{\phi}_{2N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [(\hat{\delta}_{2k})^2 + M_{\delta 2k}]$$

Alors, ϕ_2 étant stationnaire :

$$\phi_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\phi}_{2N}$$

on peut donner une forme récurrente à la relation (2).

En effet, la moyenne R_k de k nombres $\ell_1, \dots, \ell_{k-1}, \ell_k$ peut s'écrire :

$$R_k = \frac{1}{k-1} \times \frac{k-1}{k} (\ell_1 + \dots + \ell_{k-1}) + \frac{1}{k} \ell_k$$

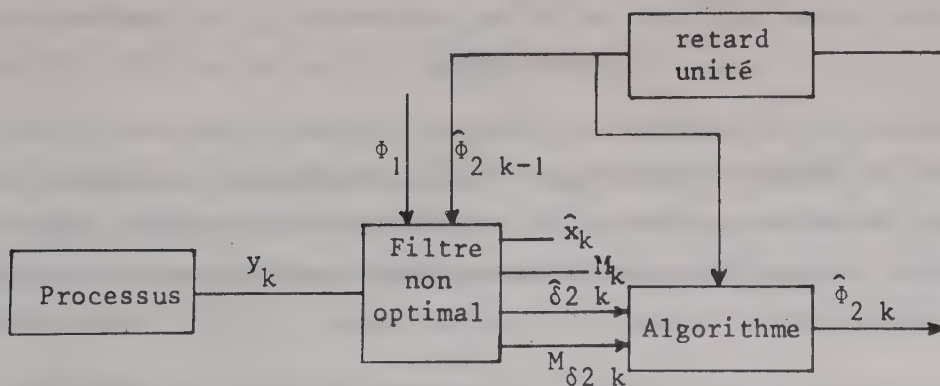
$$R_k = \frac{k-1}{k} R_{k-1} + \frac{1}{k} \ell_k$$

Ceci donne, pour la relation (2) :

$$(3) \quad \left| \begin{aligned} \hat{\phi}_{2k} &= \frac{k-1}{k} \hat{\phi}_{2k-1} + \frac{1}{k} [(\hat{\delta}_{2k})^2 + M_{\delta 2k}] \\ \hat{\phi}_{2k} &= \hat{\phi}_{2k-1} + \frac{1}{k} [(\hat{\delta}_{2k})^2 + M_{\delta 2k} - \hat{\phi}_{2k-1}] \end{aligned} \right|$$

5 - En l'état actuel de notre propos, cet algorithme est sans intérêt car, pour calculer $\hat{\delta}_{2k}$ et $M_{\delta 2k}$, il est nécessaire d'établir le filtre optimal, ce qui présuppose la connaissance de ϕ_2 !

6 - Lorsque ϕ_2 est inconnu, il vient tout naturellement à l'idée d'utiliser l'estimation $\hat{\phi}_2$ dans les équations du filtre, selon le schéma ci-dessous :



L'algorithme d'estimation de variance que nous proposons est une extension de la méthode que nous venons d'introduire.

7 - Le système (1) peut se mettre sous la forme suivante, due à KAYLATH [B.2], appelée "forme innovation" :

$$\begin{cases} x_{k+1} = p x_k + K \gamma_k \\ y_k = h x_k + \gamma_k \end{cases}$$

γ_k variable aléatoire gaussienne centrée indépendante de variance ϕ_2 à déterminer ; K étant le gain du filtre prédictor de KALMAN, que nous déterminerons en le considérant comme une variable stationnaire d'état.

Nous adopterons la formulation suivante :

$$(4) \quad \begin{cases} x_{k+1} = p x_k + K_k \gamma_k \\ K_{k+1} = K_k \\ \gamma_{k+1} = \beta_k \end{cases}$$

$$y_k = [h \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_k \\ K_k \\ \gamma_k \end{bmatrix}$$

avec variance de $\beta = \phi_2$

Si nous posons $z = \begin{bmatrix} x \\ K \\ \gamma \end{bmatrix}$, le système (4) est de la forme :

$$(5) \quad \begin{cases} z_{k+1} = f(z_k, \beta_k) \\ y_k = [h \quad 0 \quad 0] z_k \end{cases}$$

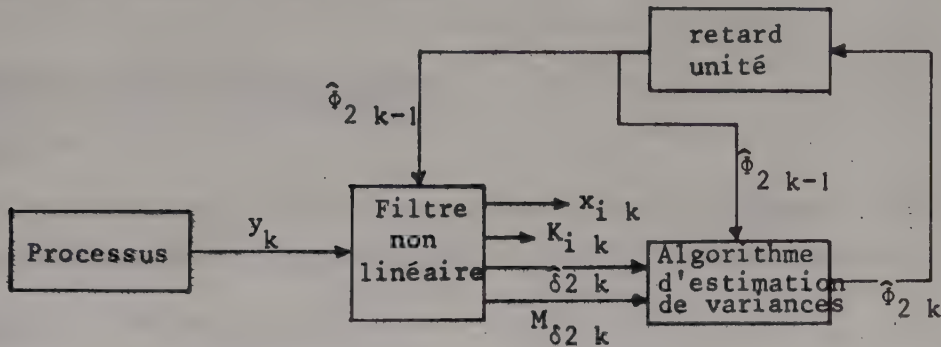
8 - La fonction f n'est pas linéaire, en raison du produit $K \times \gamma$. La reconstruction du vecteur z requiert l'emploi d'un filtre non linéaire. Celui qui a été choisi est un filtre de KALMAN appliqué aux équations linéarisées, avec prise en considération des termes du deuxième ordre [B.1].

9 - Dans le cas général multivariable et à sorties multiples, l'algorithme d'estimation des variances représenté par la formule (3) prend la forme suivante :

$$(6) \quad \hat{\Phi}_{2k} = \hat{\Phi}_{2k-1} + L_k (\hat{\delta}_{2k} \hat{\delta}_{2k}^T + M_{\delta 2k} - \hat{\Phi}_{2k-1})$$

($\hat{\Phi}_{2k}$ est maintenant une matrice)

Et le schéma fonctionnel devient :



10 - On peut envisager diverses formes pour L_k . Nous proposons ici les résultats expérimentaux obtenus dans le cas scalaire pour deux gains particuliers

L_k :

a - $L_k = \frac{1}{k}$

b - $L_k = \text{constante}$

Le deuxième cas sera utilisé si Φ_2 est lentement variable, car, dans cette hypothèse, L_k ne doit pas tendre vers zéro, afin que la correction de Φ_{2k} se poursuive indéfiniment sans s'annuler [cf. V expérimentation].

III - CONCLUSION -

Cette méthode fait appel au filtrage non linéaire dont l'emploi est facilité par l'existence d'une batterie de sous-programmes mis au point au Laboratoire d'Automatique [B.1]. Toutefois, cette non linéarité exige quelques précautions lors de l'initialisation des algorithmes.

Les expérimentations réalisées ne sont pas limitées au cas monovariable, et ont fourni des résultats satisfaisants dans le cas multivariable. Il faut noter que si le vecteur d'état est à n dimensions et le vecteur de mesure à m dimensions, le nouveau vecteur d'état estimé par le filtre non linéaire est à $m + n + m \times n$ dimensions [B.3].

Si l'existence de bruits de mesures et d'équations rend nécessaire l'utilisation des méthodes décrites dans les chapitres 2 et 3 de la deuxième

partie, dans le cas de systèmes déterministes ou faiblement bruités, il existe des théories telles que celles de LUENBERGER qui n'exigent pas la mise en oeuvre de moyens aussi importants. Les "observateurs" de LUFNBERGER font l'objet du chapitre suivant.

IV - PROGRAMMES REALISES -

1 - Principe des programmes

Chacun des programmes est composé d'une boucle constituée du filtre d'estimation de l'état généralisé x , y , k et de la matrice $\hat{M}$ de l'état généralisé pour une variance Φ donnée et du filtre d'estimation de la variance Φ pour $\hat{y}_{t+1}$ et $\hat{M}_{yy\ t+1}$ connus. Les programmes prennent des noms qui diffèrent selon l'algorithme utilisé pour le 2ème filtre.

2 - Caractéristiques des programmes

Nom : PP

But : Estimation de l'état, du gain du filtre de KALMAN et de la variance du bruit, par filtrage non linéaire approché, dans le cas monovariable.

Taille : 2 100 mots 1130

Temps d'exécution : Dix minutes pour 1000 itérations sur 1130

Ces programmes font appel aux sous-programmes généraux CPROD, CRAZE, CESTE, de filtrage non linéaire dont la description se trouve dans [B.1].

V - EXPERIMENTATION -

L'expérimentation a été réalisée à partir du modèle suivant :

$$\left| \begin{array}{l} x_{k+1} = p x_k + K_k y_k \\ K_{k+1} = K_k \\ y_{k+1} = \beta_k \\ y_k = [h \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_k \\ K_k \\ y_k \end{bmatrix} \end{array} \right|$$

avec les valeurs 0.8, 0.9, 0.95 pour p .

$$h = 1$$

La figure 1 représente l'évolution de $\hat{\Phi}_2$ à partir d'une même initialisation $\hat{\Phi}_0 = 1$ pour différentes formes du gain du filtre d'estimation de variances :

- (1) $L_k = \frac{1}{k}$
- (2) $L_k = \text{constante} = 0.01$
- (3) $L_k = \text{constante} = 0.001$

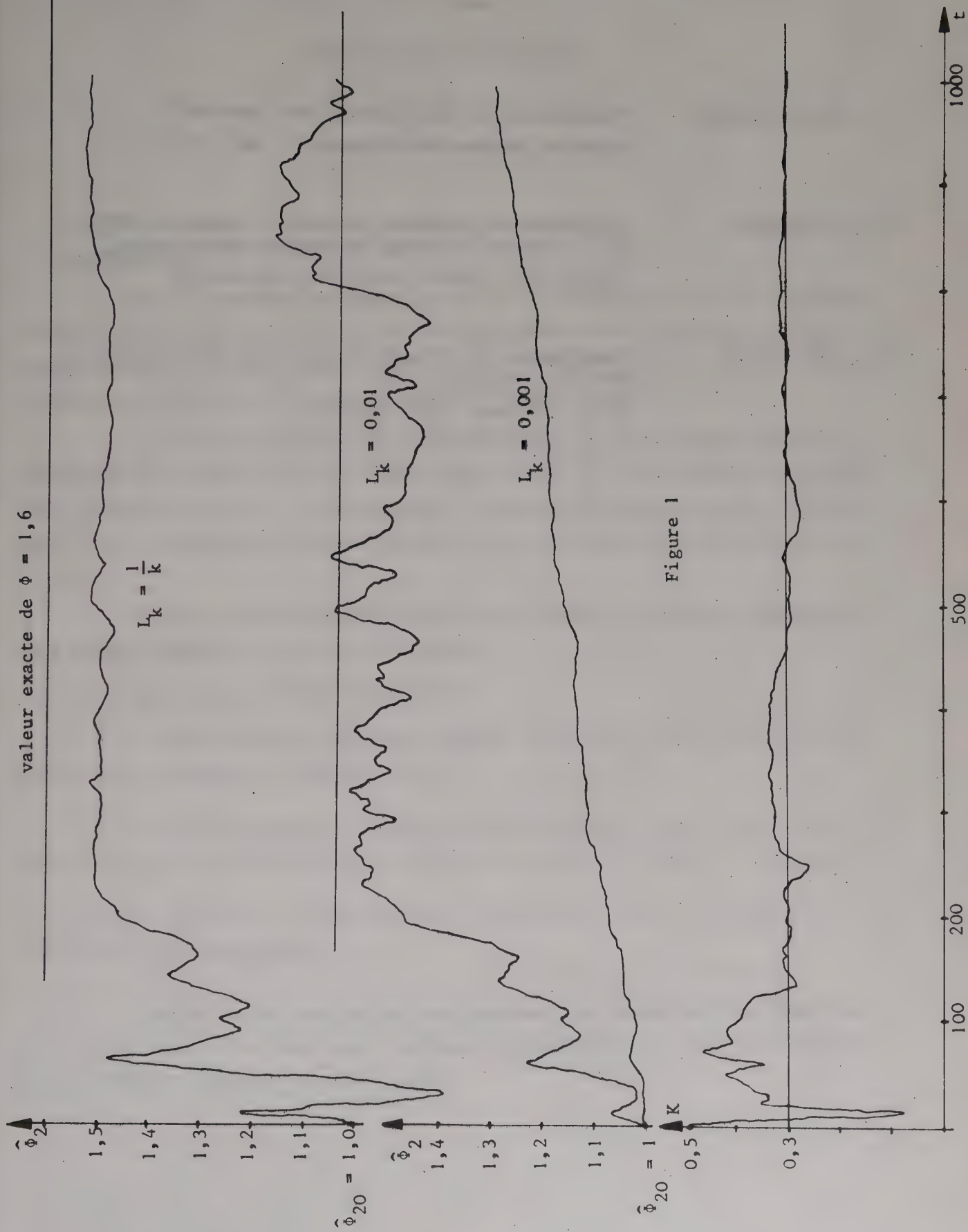
ainsi qu'un exemple d'évolution de K , qui est sensiblement le même pour les trois vecteurs de L_k .

Nous constatons que l'algorithme commence à converger à partir de la 200^e itération dans les cas (1) et (2).

Nous observons que $L_k = 0.01$ offre un meilleur compromis entre rapidité de convergence et incertitude finale que $L_k = 0.001$.

Indiquons que, même dans le cas où Φ converge difficilement, K converge normalement, sans qu'on observe de différences caractéristiques avec le tracé de la figure 1.

valeur exacte de $\phi = 1,6$



BIBLIOGRAPHIE

- |1| Ph. De LARMINAT - "Identification par filtrage non linéaire"
Thèse de Doctorat-ès-Sciences - 4 Mai 1971

- |2| T. KAILATH - "An innovation approach to least - squares estimation.
pt.I : linear filtering in additive white noise"
I.E.E.E. Dec. 1968 - vol.AC-13, pp.646-655

- |3| J.M. PIASCO - "Application de l'identification par filtrage non-li-
néaire sous-optimal"
D.E.A. Octobre 1971 - E.N.S.M.

Chapitre 4

OBSERVATEURS DE LUENBERGER

I - INTRODUCTION -

Soit un processus d'équations d'état de dimension n avec m équations de mesure non bruitées $[y = H x]$. Si ces dernières sont linéairement indépendantes entre elles, et en nombre égal à n , la reconstitution du vecteur d'état s'effectue aisément par simple inversion de la matrice H . ($x = H^{-1} y$)

La solution proposée par LUENBERGER, dans le cas le plus fréquent où les équations de mesure sont en nombre insuffisant ($m < n$), consiste à compléter ces m équations par $(n - m)$ combinaisons linéaires du vecteur d'état, obtenues grâce à un "observateur" dont la dimension des équations dynamiques se réduit à $n - m$.

Si les n équations ainsi constituées forment un système indépendant, nous sommes ramenés au cas idéal précédent.

Trois questions se posent alors :

A - Dans quelles conditions peut-on reconstituer une combinaison linéaire des composantes du vecteur d'état ?

B - Cette combinaison linéaire étant réalisée, sous quelles conditions forme-t-elle, avec les équations de mesure, un système d'équations indépendantes ?

C - Quelle est l'influence de l'observateur ainsi constitué sur la stabilité du système global ?

L'objet de ce chapitre est non seulement de répondre à ces questions A, B, C, mais aussi de développer quelques algorithmes permettant de réaliser un "observateur" pour un processus donné.

II - DESCRIPTION DE LA METHODE -

A - Reconstitution d'une combinaison linéaire des composantes du vecteur d'état

Théorème 1

Soit S_1 un système représentant les équations d'un processus stationnaire forcé :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + D u + R_1 \\ y = H x + R_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= n \times n ; D = n \times r \\ R_1 &= n \times 1 = \text{vecteur perturbations} \\ H &= m \times n ; R_2 = m \times 1 = \text{vecteur consigne} \end{aligned}$$

qui pilote un observateur S_2 d'équation :

$$\dot{z} = B z + Q y + E u + R_3 \quad \begin{aligned} B &= l \times l ; Q = l \times m \\ E &= l \times r ; R_3 = l \times 1 \end{aligned}$$

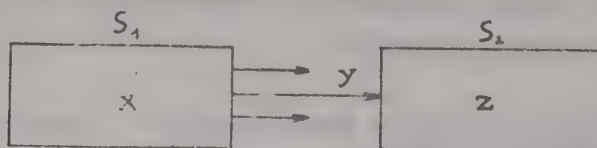
[B et Q donnés, E et R_3 à déterminer]

Si A et B n'ont pas de valeurs propres communes, il existe une transformation linéaire T permettant de passer de x à z, telle que si :

$$z(0) = T x(0) \quad T = l \times n$$

alors $z(t) = T x(t) \quad \forall t > 0$

{De façon plus générale : $z(t) = T x(t) + e^{Bt} [z(0) - T x(0)]$ }



Démonstration :

a - Condition nécessaire

Supposons le problème résolu et soit T telle que :

$$(1) \quad z(t) = T x(t)$$

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = A x + D u + R_1 \\ y = H x + R_2 \end{cases}$$

(3) Processus

$$\begin{array}{lcl}
 (4) & \text{Observateur} & \left| \begin{array}{l} \dot{z} = B z + Q y + E u + R_3 \\ \quad = B z + Q [H x + R_2] + E u + R_3 \end{array} \right. \\
 (4') & & \left| \begin{array}{l} \dot{z} = B z + C x + E u + R_3 + Q R_2 \end{array} \right. \quad C \stackrel{\Delta}{=} Q H
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 (1) \text{ et } (2) & \Rightarrow & \dot{z} = T \dot{x} = T A x + T D u + T R_1 \\
 (4') \text{ et } (1) & \Rightarrow & \begin{array}{l} \dot{z} = B T x + C x + E u + R_3 + Q R_2 \\ \quad = (B T + C) x + E u + R_3 + Q R_2 \end{array}
 \end{array}$$

Pour que ces équations soient équivalentes, il faut que :

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} T A - B T = C = Q H \\ E = T D \\ R_3 = T R_1 - Q R_2 \end{array} \right.$$

Pour Q et B donnés, l'équation (5) admet une solution unique T si A et B ont des valeurs propres distinctes. [cf. GANTMACHER - Tome I - page 228]

b - Condition suffisante

$$\begin{array}{lcl}
 \left| \begin{array}{l} T A - B T = C = Q H \\ E = T D \\ R_3 = T R_1 - Q R_2 \end{array} \right. & \text{et} & \begin{array}{l} (6) \quad \left| \begin{array}{l} \dot{x} = A x + D u + R_1 \\ y = H x + R_2 \end{array} \right. \\ (7) \quad \left| \begin{array}{l} \dot{z} = B z + C x + E u + R_3 + Q R_2 \end{array} \right. \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (7) - T \times (6) & \Rightarrow \dot{z} - T \dot{x} = B z + C x + E u + R_3 + Q R_2 - T A x - T D u - T R_1 \\
 & = B z + (C - T A) x + (E - T D) u + R_3 + Q R_2 - T R_1 \\
 \dot{z} - T \dot{x} & = B (z - T x)
 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad z(t) = T x(t) + e^{Bt} [z(0) - T x(0)]$$

Conclusion :

On peut toujours reconstruire une combinaison linéaire du vecteur d'état d'un système linéaire, forcé ou non, à condition de respecter les conditions du théorème 1. Pour B et Q donnés, on peut calculer T, E et R₃. Par la suite, on se contentera de raisonner sur le système non forcé, les démonstrations se généralisant sans difficulté dans le cas d'un système forcé.

En résumé :

$$\text{Processus} \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x} = A x + D u + R_1 \\ y = H x + R_2 \end{array} \right.$$

Observateur $\rightarrow \dot{z} = B z + Q y + E u + R_3$

(8)

Relations $\rightarrow$

$$\begin{cases} TA - BT = C \\ C \triangleq Q H \\ E = T D \\ R_3 = T R_1 - Q R_2 \end{cases}$$

Pour B et Q donnés, ces relations permettent de déduire T, E, R_3 .

Selon le choix fait pour B et Q, nous obtiendrons diverses matrices T en valeur et en dimension. Pour B carrée, T sera carrée. Nous la baptiserons alors T_n .

B - Régularité de la transformation $x \Rightarrow z$

Le processus d'ordre n étant supposé observable et à une seule sortie, nous allons montrer qu'il sera possible de réaliser un observateur d'ordre n, tel que la matrice T_n soit régulière (paragraphe 1).

x se déduira de z par la relation $x = T^{-1} z$

Les paragraphes 2 et 3 permettent de réduire l'ordre de cet observateur à n-1, grâce à l'équation de mesure $y = h x$, et d'exprimer x en fonction de z et y.

Les paragraphes 4 et 5 étendront ce résultat à un processus à m sorties.

1 - Observateur d'ordre n |B.1|

Théorème 2

Soit un système S_1 non perturbé, à une seule sortie :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x & A = n \times n \\ y = h x & h = 1 \times n \end{cases}$$

qui pilote un observateur S_2 :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= B z + q y & B &= n \times n \\ & & q &= \text{vecteur } n \times 1 \end{aligned}$$

A et B matrices $n \times n$ à valeurs propres distinctes

Si (A,h) est observable

Si (B,q) est commandable

Soit T_n la solution unique de $T A - B T = q h = C$,
alors T_n est régulière, donc inversible.

On pourra trouver la démonstration de ce théorème dans [B.1].

Théorème 3 [B.1]

Soit : $\dot{z} = B z + q y$

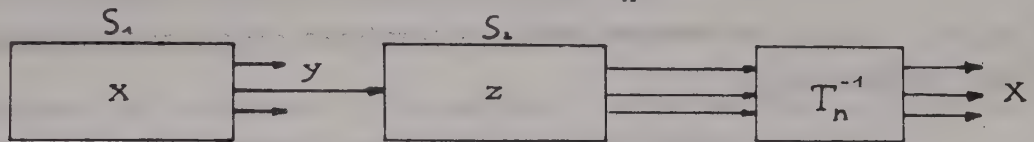
Si B est diagonale à valeurs propres distinctes, si q est un vecteur colonne à composantes non nulles, alors (B,q) est commandable (ceci découle de la définition de la commandabilité).

$$\text{Le système } \dot{z} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \mu_n \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} y \quad \alpha_i \neq 0 \quad i = 1, n$$

est commandable. En général, nous prendrons $\alpha_i = 1$, $i = 1, n$.

Conclusion :

Soit un processus observable à n états et à une seule sortie. L'observateur z à n dimensions construit suivant le théorème 3 est commandable. Satisfaisant aux conditions d'application du théorème 2, la matrice T_n telle que $z = T_n x$ est régulière et inversible, d'où : $x = T_n^{-1} z$



2 - Observateur d'ordre n-1 (pour un processus à une sortie) [B.1]

Le mesure y, utilisée pour piloter l'observateur d'ordre n du paragraphe 1, contient une information algébrique qui n'a pas encore été exploitée : connaissant cette mesure y et n-1 composantes du vecteur d'état, la n^{ième} composante peut être déduite de la relation $y = h x$.

Cette remarque va permettre la mise en oeuvre d'un observateur d'ordre n-1, réalisant "l'économie" d'un intégrateur, si cet observateur est constitué par un système analogique.

En effet, il est toujours possible de construire un observateur d'ordre n-1 tel que (théorème 1) :

(9) $z = T x$ $T = (n-1) \times n$

Joignons l'équation de mesure à (9) :

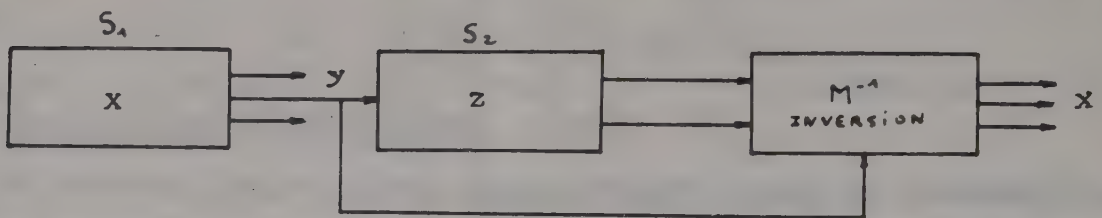
$$\begin{cases} z = T x \\ y = h x \end{cases} \quad \begin{bmatrix} z \\ - \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ - \\ h \end{bmatrix} x = M x$$

Si la matrice M, de dimension $n \times n$, est régulière, on a :

$$x = M^{-1} \begin{bmatrix} z \\ - \\ y \end{bmatrix}$$

z étant l'observateur construit et y la mesure.

Nous nous proposons dans le paragraphe suivant de chercher T telle que M soit régulière.



3 - Méthode permettant de construire une matrice M régulière [B.1]

Soit S_1 un processus observable d'ordre n à une sortie

$$\begin{cases} \dot{x} = A x \\ y = h x \end{cases}$$

et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ des nombres réels ou complexes distincts et différents des valeurs propres de A.

On peut construire un observateur d'ordre $n-1$ pour S_1 ayant $n-1$ des n valeurs μ_i comme valeurs propres de sa matrice de transition B.

En effet, l'observateur d'ordre n , construit suivant le théorème 3, sera :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} y$$

Il est commandable, et il existe T_n unique et inversible (théorème 2) telle que :

$$z = T_n x$$

Les n lignes t_i de T_n sont indépendantes. On peut remplacer une des lignes t_i par h de façon à avoir :

$t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n, h$ indépendants

(théorème de la base incomplète)

Posons :

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{i-1} \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} ; \quad z' = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z' &= T x \\ y &= h x \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} z' \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ h \end{bmatrix} x = M x \quad M \triangleq \begin{bmatrix} T \\ h \end{bmatrix}$$

M étant régulière :

$$x = M^{-1} \begin{bmatrix} z' \\ y \end{bmatrix}$$

Conclusion : Les équations du processus étant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x & A = n \times n \\ y = h x & h = 1 \times n \end{cases}$$

la construction préalable de l'observateur d'ordre n :

$$\dot{z} = B z + Q y$$

B et Q satisfaisant les conditions du paragraphe A et du théorème 3, ainsi que la résolution de l'équation :

$$T_n A - B T_n = Q h$$

conduit à la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} T \\ h \end{bmatrix}$$

permettant de calculer x en fonction de n-1 sorties de l'observateur d'ordre n-1, noté z', et de la mesure y, grâce à la relation :

$$x = M^{-1} \begin{bmatrix} z' \\ y \end{bmatrix}$$

4 - Extension au cas multi-sorties [B.1], [B.3]

Observateur d'ordre n-m

a - Tout système linéaire à n variables d'état, possédant m sorties,

peut se mettre, grâce à un changement de base, sous la forme de m sous-systèmes de dimension n_i [$i \in \{1, \dots, m\}$] possédant chacun une seule sortie.

La construction précédente nous permettant de trouver un observateur d'ordre $n_i - 1$ pour le $i^{\text{ème}}$ sous-système à une sortie, nous aurons un observateur global d'ordre :

$$\sum_{i=1}^m n_i - 1 = n - m$$

Un observateur, dans le cas de sorties multiples, peut donc être réalisé par cette méthode. Mais, des travaux s'effectuant par ailleurs au Laboratoire d'Automatique dans le domaine de ces changements de base, nous avons préféré choisir une méthode qui extrapole directement les résultats du paragraphe B-3 dans le cas multi-sorties.

b - Soit un processus décrit par :

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{x} = A x \\ y = H x \end{cases} \quad \begin{matrix} A = n \times n \\ H = m \times n \end{matrix}$$

Il existe T telle que : (théorème 1)

$$z' = T x \quad T = (n - m) \times n$$

Formons :

$$\begin{bmatrix} z' \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ H \end{bmatrix} x = M x \quad M \triangleq \begin{bmatrix} T \\ H \end{bmatrix} = n \times n$$

Choisissons T telle que M soit régulière.

Nous déduirons :

$$x = M^{-1} \begin{bmatrix} z' \\ y \end{bmatrix}$$

En remplaçant dans (10) :

$$(11) \quad \begin{bmatrix} \dot{z}' \\ y \end{bmatrix} = M A M^{-1} \begin{bmatrix} z' \\ y \end{bmatrix}$$

Posons :

$$(12) \quad M A M^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} B & Q \\ E & F \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$(11') \quad \begin{bmatrix} \dot{z}' \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & Q \\ E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z' \\ y \end{bmatrix}$$

Relation de laquelle nous déduisons l'observateur :

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{z}' = B z' + Q y \\ x = M^{-1} \begin{bmatrix} z' \\ y \end{bmatrix} \end{cases} \quad \begin{aligned} B &= (n-m) \times (n-m) \\ Q &= (n-m) \times m \end{aligned}$$

Remarque : Le choix de T, selon LUENBERGER, telle que M soit régulière, conduit à un observateur [matrices B et Q] qui n'est pas forcément stable.

Le cheminement inverse que nous proposons consiste à choisir B tel que l'observateur soit stable et à déduire T de l'équation (12) qui, lorsqu'on multiplie les deux membres à droite par M, conduit à :

$$M A = \begin{bmatrix} B & Q \\ E & F \end{bmatrix} M$$

$$\text{soit :} \quad \begin{bmatrix} T \\ H \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} B & Q \\ E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ H \end{bmatrix}$$

$$\text{et en particulier à : } T A - B T = Q H$$

Mais la solution T de cette équation ne rend pas obligatoirement M régulière.

Toutefois, cette forme de résolution est pratiquement plus intéressante, puisqu'elle permet de choisir les paramètres intervenant dans l'observateur [matrices B et Q].

Un algorithme de résolution, permettant de trouver rapidement M pour B et Q donnés et d'en préciser la régularité, est exposé en V.

5 - Conditions imposées à la matrice B pour que l'observateur soit stable

Le système en z est un observateur d'ordre (n-m) lié au vecteur d'état x par la relation :

$$z(t) = T x(t) + e^{Bt} [z(0) - T x(0)]$$

Nous aurons $z(t) = T x(t) \quad \forall t$ à condition de choisir :

$$z(0) = T x(0)$$

Cette condition étant rarement réalisable, du fait que x(0) n'est pas connu en général, montrons que la matrice B doit être à valeurs propres à partie réelle négative.

Notons par $\hat{z}$ la solution du système (13) partant d'une condition initiale différente de $T x(0)$.

En général, nous prendrons $\hat{z}(0) = 0$

L'observateur réel sera noté :

$$\dot{\hat{z}} = B \hat{z} + Q y \quad \hat{z}(0) = 0$$

Il existera donc un écart $\tilde{z}$ entre l'observateur réel $\hat{z}$ et celui z qui partirait de la condition initiale $T x(0)$.

Notons :

$$(14) \quad \tilde{z} = \hat{z} - z$$

Le vecteur d'état x calculé grâce à $\hat{z}$ sera noté $\hat{x}$ et représentera un écart $\tilde{x}$ par rapport à x .

Notons :

$$(15) \quad \tilde{x} = \hat{x} - x$$

Nous aurons :

$$(16) \quad \begin{aligned} \hat{x} &= M^{-1} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \vdots \\ y \end{bmatrix} \\ \tilde{x} &= M^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'observateur total réel sera :

$$(17) \quad \begin{cases} \dot{\hat{z}} = B \hat{z} + Q y & \hat{z}(0) = 0 \\ \hat{x} = M^{-1} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \vdots \\ y \end{bmatrix} \end{cases}$$

* Efficacité de l'observateur

L'observateur $\hat{z}$ sera d'autant meilleur que $\hat{x}$ sera voisin de x , c'est-à-dire que $\tilde{x}$ sera petit.

De (14), nous déduisons :

$$\dot{\tilde{z}} = \dot{\hat{z}} - \dot{z}$$

Soit de (17) et (13) :

$$(17') \quad \dot{\tilde{z}} = B \tilde{z}$$

Si B est à valeurs propres à partie réelle négative, $\tilde{z} \rightarrow 0$ lorsque t croît. Et ceci d'autant plus vite que les parties réelles des valeurs propres

de B sont grandes en valeur absolue (en pratique, il ne faut pas que celles-ci soient trop grandes, car les mesures sont généralement bruitées).

Si $\tilde{z} \rightarrow 0$, grâce à (16) nous voyons que $\tilde{x} \rightarrow 0$, donc que $\hat{x} \rightarrow x$ lorsque t croît.

C - Stabilité de l'ensemble processus - observateur en boucle fermée [B.3]

$$\begin{array}{l} \text{a - Soit :} \\ \left| \begin{array}{l} \dot{x} = A x + D u \\ x \text{ connu } \forall t \end{array} \right. \quad A = n \times n ; D = n \times r \end{array}$$

un système linéaire auquel nous appliquons une commande $u = -S x$ $S = r \times n$

Le système global sera décrit par :

$$\dot{x} = (A - D S) x$$

Les pôles du système en boucle fermée sont les valeurs propres de $A - D S$.

b - Supposons que le vecteur d'état ne soit pas mesurable et nécessite la construction d'un observateur.

Supposons en première approche que nous puissions réaliser $z(0) = T x(0)$. Nous aurons alors $\hat{x} = x$.

$$\begin{array}{l} \text{Processus} \quad \left| \begin{array}{l} \dot{x} = A x + D u \\ y = H x \end{array} \right. \quad x(0) = x_0 \\ \\ \text{Commande} \quad \left| u = -S x \right. \\ \\ \text{Observateur} \quad \left| \dot{z} = B z + Q y + T D u \right. \end{array}$$

en boucle fermée :

$$(18) \quad \left| \dot{x} = (A - D S) x \right.$$

$$(19) \quad \left| \dot{z} = B z + (Q H - T D S) x \right.$$

Les deux systèmes d'équations (18) et (19) sont mis en cascade et en particulier z n'intervient pas dans (18).

Les pôles du système global (18) + (19) sont égaux à l'union des pôles de (18) et de (19), c'est-à-dire de ceux du processus bouclé sans observateur et de ceux de l'observateur.

Si (18) et (19) sont stables, le système global bouclé est stable.

c - Dans le cas général, nous ne pouvons réaliser $z(0) = T x(0)$. Nous utiliserons donc un observateur nul.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Processus} & \left| \begin{array}{l} \dot{x} = A x + D u \\ y = H x \end{array} \right. & x(0) = x_0 \\
 \text{Commande} & \left| u = -S \hat{x} \right. & \\
 \text{Observateur} & \left| \begin{array}{l} \dot{\hat{z}} = B \hat{z} + Q y + T D u \\ \hat{x} = M^{-1} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ y \end{bmatrix} \end{array} \right. & \hat{z}(0) = 0
 \end{array}$$

De plus, posons :

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Observateur fictif} & \dot{z} = B z + Q y + T D u & z(0) = T x(0) \\
 & \left| \begin{array}{l} \tilde{z} = \hat{z} - z \\ \tilde{x} = \hat{x} - x \end{array} \right. &
 \end{array}$$

$\hat{x}$ = combinaison linéaire de $\hat{z}$ et y = combinaison linéaire de $\hat{z}$ et de x .

$$(20) \quad \hat{x} = L \hat{z} + N x$$

La relation (20) est vraie $\forall t$. En particulier, lorsque t croît $\hat{x} \rightarrow x$ et $\hat{z} \rightarrow T x$.

(20) devient :

$$x = L T x + N x$$

Il faut donc avoir :

$$(21) \quad L T + N = I_n$$

En boucle fermée :

$$(22) \quad \left| \begin{array}{l} \dot{x} = A x - D S \hat{x} \\ \dot{\hat{z}} = B \hat{z} + Q H x - T D S \hat{x} \\ \hat{x} = L \hat{z} + N x \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{D'où :} & \dot{x} = A x - D S [L \hat{z} + N x] \\
 & \dot{\hat{z}} = B \hat{z} + Q H x - T D S [L \hat{z} + N x]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Finalement :} & \left| \begin{array}{l} \dot{x} = (A - D S N) x - D S L \hat{z} \\ \dot{\hat{z}} = (Q H - T D S N) x + (B - T D S L) \hat{z} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Sous cette forme, la conclusion sur les valeurs propres du système bouclé est possible, mais non immédiate. Prenons plutôt comme variables d'état $\hat{x}$ et $\hat{z}$.

En remplaçant (15) dans (22) :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} - \dot{\hat{x}} &= A(\hat{x} - \hat{x}) - D S \hat{x} \\ \dot{\hat{x}} &= (A - D S) \hat{x} + \dot{\hat{x}} - A \hat{x}\end{aligned}$$

or :

$$A \hat{x} = A M^{-1} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{de (16)}$$

de (12)

$$A M^{-1} = M^{-1} \begin{bmatrix} B & Q \\ E & F \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} - A \hat{x} &= M^{-1} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ 0 \end{bmatrix} - M^{-1} \begin{bmatrix} B & Q \\ E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= M^{-1} \begin{bmatrix} \hat{z} - B \hat{z} \\ -E \hat{z} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -E \end{bmatrix} \hat{z} \quad \text{à cause de (17')}$$

d'où finalement :

(23)

$$\dot{\hat{z}} = B \hat{z}$$

(24)

$$\dot{\hat{x}} = (A - D S) \hat{x} - M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \hat{z}$$

Les deux systèmes (23) et (24) sont mis en cascade et, en particulier, $\hat{x}$ n'intervient pas dans (23). Les pôles du système global (23) + (24) sont égaux à l'union des pôles de (23) et de (24).

Conclusion :

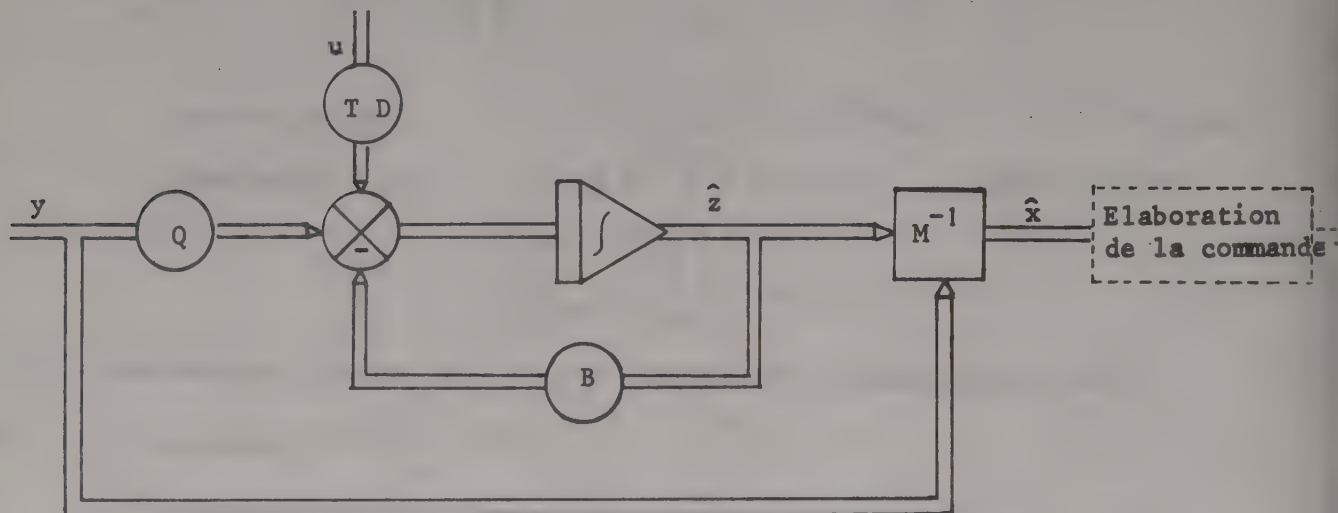
Lorsque l'on introduit un observateur dans un système bouclé, les pôles du système global sont constitués des pôles du système bouclé initial plus les pôles de l'observateur.

En particulier, si le système bouclé initial et l'observateur sont stables, l'ensemble reste stable.

III - CONCLUSION -

Les "observateurs" de LUENBERGER sont des reconstituteurs dynamiques qui sont d'autant plus économiques à mettre en oeuvre, lors d'une réalisation analogique, que le nombre de mesures est élevé. Le nombre d'intégrateurs utilisé se limitera à $n - m$. Mais, toutefois, la théorie de LUENBERGER est essentiellement déterministe et ne tient pas compte des bruits.

Les composantes mesurées de l'état sont intégralement transmises à l'organe élaborant la commande, suivant le schéma ci-dessous.



Si ces mesures sont bruitées, les bruits seront transmis au processus. L'application des "observateurs" aux processus réels semble donc limitée aux processus ayant de faibles bruits de sortie.

Les essais en simulation qui ont été effectués tiennent compte de faibles bruits additifs et conduisent à des résultats satisfaisants.

Les reconstituteurs dynamiques de KALMAN et de LUENBERGER ont des structures semblables. En fait, la structure d'un "observateur" d'ordre n peut être la même que celle du filtre de KALMAN.

En effet, si les équations du processus sont :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + D u \\ y = H x \end{cases} \quad \begin{matrix} A = n \times n, & D = n \times r \\ H = m \times n \end{matrix}$$

celle de l'observateur d'ordre n sera :

$$\dot{z} = B z + Q y + T D u \quad B = n \times n, \quad Q = n \times m$$

avec $T A - B T = Q H$

Prenons pour matrice de changement de base T la matrice unité I .

Nous aurons : $z = 1 \quad x = x$

et $A - B = Q H$

soit $B = A - Q H$

L'observateur sera :

$$\dot{\hat{x}} = (A - Q H) \hat{x} + Q y + D u$$

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + D u + Q (y - H \hat{x})$$

Equation qui représente bien le modèle "corrigé" par l'écart processus - modèle.

Nous pouvons donc conclure qu'un filtre de KALMAN dont la matrice de gain n'est pas exactement calculée est un observateur (sous des conditions de stabilité) qui permettra de reconstituer le vecteur d'état.

V - PROGRAMME REALISE -

1 - Principe et algorithmes

Notations

Processus	$\dot{x} = A x + D u + R_1$ $y = H x + R_2$	$A = n \times n ; D = n \times r ; R_1 = n \times 1$
		$H = m \times n ; R_2 = m \times 1$

Observateur	$\dot{z} = B z + Q y + E u + R_3$ $= B z + C x + E u + R_3 + Q R_2$	$B = (n-m) \times (n-m)$

Relations	$C = Q H$ $E = T D$ $R_3 = T R_1 - Q R_2$ $T A - B T = C$

Calcul de x :

$z = T x$ $y = H x + R_2$	$\Leftrightarrow$	$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = M x + \begin{bmatrix} 0 \\ R_2 \end{bmatrix}$ $M \triangleq \begin{bmatrix} T \\ H \end{bmatrix}$
------------------------------	-------------------	--

$x = M^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ R_2 \end{bmatrix} \right\}$ $K = M^{-1}$

Principe général

Le principe général de la méthode utilisée est le suivant :

A - Calcul d'un observateur d'ordre n. Dans ce but, nous calculons T_n régulière, solution de :

$$T A - B T = C = Q H, \text{ pour } B, Q \text{ donnés.}$$

B - Remplacement de m lignes de T_n par les m lignes de la mesure H, de façon que la matrice résultante reste régulière.

C - En supprimant les m composantes de z correspondant aux m lignes supprimées de T_n , nous obtenons l'observateur d'ordre n - m.

A - a - Calcul de l'observateur d'ordre n. Formation de B et Q

On calcule en premier l'observateur d'ordre n, tel que :

$$z = T_n x$$

T_n solution de :

$$(25) \quad T_n A - B T_n = Q H = C$$

B et Q sont laissés à notre libre choix.

Nous prendrons :

$$B = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{bmatrix}$$

Les μ_i étant des nombres négatifs, différents entre eux et différents des valeurs propres de A [en général, supérieurs en valeur absolue aux valeurs propres de A, afin que les transitoires de l'observateur soient plus brèves que celles du processus].

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

Ce choix est motivé par les raisons suivantes :

Dans le cas d'une seule sortie, B diagonale et $q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ garantissent que T_n , solution de (25), est unique et régulière.

Dans le cas de m mesures, prenons :

$$Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_m] \quad q_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, m$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}, \quad h_i = \text{ligne } 1 \times n \quad ; \quad i = 1, m$$

$$Q H = q_1 h_1 + q_2 h_2 + \dots + q_m h_m$$

Soit :

$$\begin{array}{l} T_n^1 \text{ tel que } T_n^1 A - B T_n^1 = q_1 h_1 \\ T_n^2 \text{ tel que } T_n^2 A - B T_n^2 = q_2 h_2 \\ \vdots \\ T_n^m \text{ tel que } T_n^m A - B T_n^m = q_m h_m \end{array}$$

En faisant la somme de ces m équations, nous voyons que :

$$T_n = T_n^1 + T_n^2 + \dots + T_n^m \text{ est solution de :}$$

$$T_n A - B T_n = Q H$$

T_n , somme de m matrices régulières, n'est pas forcément régulière. Mais, il n'y a aucune raison particulière pour qu'elle ne le soit pas ! Si cela était, on aurait d'autres solutions en prenant d'autres matrices B. On finira donc par trouver une T_n régulière après un nombre restreint d'essais.

b - Résolution de $T_n A - B T_n = C$ (B diagonale)

Sur le plan théorique, la solution générale de cette équation est connue. Sur le plan pratique, dans le cas particulier où B est diagonale, nous avons préféré transformer (25) en un système de n^2 équations linéaires à n^2 inconnues (26).

$$(26) \quad \begin{array}{l} S W = F \\ S = n^2 \times n^2 \\ W = n^2 \times 1 \\ F = n^2 \times 1 \end{array}$$

Passage de (25) à (26) :

T_n est une matrice à n^2 inconnues. A - B - C sont connues.

(25) s'écrit sous forme développée pour la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne :

$$\sum_k t_{ik} a_{kj} - \mu_i t_{ij} = c_{ij} \quad \left| \begin{array}{l} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots n \end{array} \right.$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$(27) \quad \left| \begin{array}{l} \sum_k t_{ik} (a_{kj} - \delta) = c_{ij} \\ \delta = \mu_i \text{ si } k = j \\ \delta = 0 \text{ si } k \neq j \end{array} \right.$$

A la matrice $\{c_{ij}\}$ nous allons faire correspondre le vecteur F par :

$$F_{i+(j-1)n} = c_{ij} \quad \left| \begin{array}{l} i = 1, n \\ j = 1, n \end{array} \right.$$

A la matrice $\{t_{ik}\}$ nous allons faire correspondre le vecteur W par :

$$W_{i+(k-1)n} = t_{ik} \quad \left| \begin{array}{l} i = 1, n \\ k = 1, n \end{array} \right.$$

La matrice S sera telle que $\{s_{ij}\} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} i = 1, n^2 \\ j = 1, n^2 \end{array} \right.$

$$\text{puis } s_{i+(j-1)n, i+(k-1)n} = a_{kj} - \delta \quad \left| \begin{array}{l} i = 1, n \\ j = 1, n \\ k = 1, n \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ll} \delta = \mu_i & \text{si } k = j \\ \delta = 0 & \text{si } k \neq j \end{array} \right.$$

Inconvénient : Si A est une $n \times n$, S est une $n^2 \times n^2$.

B - Formation de M telle que :

$$M \triangleq \begin{bmatrix} T \\ \text{---} \\ H \end{bmatrix}$$

La matrice T_n étant régulière, il existe m lignes de T_n telles que, en remplaçant ces lignes par les m lignes de H, la matrice $\begin{bmatrix} T \\ \text{---} \\ H \end{bmatrix}_n$ résultante soit régulière.

Algorithme :

Nous considérons la première ligne h_1 de H (première mesure).

Nous remplaçons successivement chacune des lignes de T_n par h_1 . Nous calculons à chaque fois le déterminant obtenu. Supposons que le $i^{\text{ième}}$ soit le plus grand en valeur absolue. Nous supprimons la $i^{\text{ième}}$ ligne de T_n , nous la remplaçons par la $i+1^{\text{ième}}$, qui est elle-même remplacée par la $i+2^{\text{ième}}$... jusqu'à la $n^{\text{ième}}$. La $n^{\text{ième}}$ est remplacée par h_1 .

Nous recommençons en considérant la deuxième ligne h_2 de H, la $n^{\text{ième}}$ ligne de la nouvelle matrice T_n [mesure h_1] restant intouchée ... etc ... pour les m lignes de H.

Nous obtenons pour résultat une matrice T constituée de $n-m$ lignes de T_n , puis des mesures $h_1, h_2, \dots, h_m$. Si T_n est régulière, la matrice $M = \begin{bmatrix} T \\ \text{---} \\ H \end{bmatrix}$ est régulière.

Remarque :

On peut obtenir une matrice M régulière même si T_n n'est pas régulière, à condition que seules m lignes soient dépendantes dans T_n . Elles seront remplacées par les m mesures.

C - Formation de l'observateur d'ordre n - m

On fait subir aux matrices Q, C, B, les mêmes suppressions et translations de lignes qu'à la matrice T_n . De plus, on fait subir une manipulation identique aux colonnes de B.

La matrice T obtenue $[(n-m) \times n]$ est utilisée pour former $E = T D$ et $R_3 = T R_1 - Q R_2$.

On calcule l'inverse K de M, soit $K = M^{-1}$.

On obtient, ainsi, un observateur d'ordre n - m tel que :

$$z = T x \quad T = (n-m) \times m$$

On peut se demander si cette matrice T ainsi formée est toujours solution de $T A - B T = C$, $B = (n-m) \times (n-m)$, on peut vérifier que oui car B est diagonale.

Nous pouvons illustrer cette suite d'opérations dans le cas de trois états et deux mesures.

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times \\ : & : & : \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} + & + & + \\ - & - & - \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \times & \\ & & : \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1ère série d'opérations :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times \\ : & : & : \end{bmatrix} \xrightarrow{\Delta_1} \begin{bmatrix} + & + & + \\ \times & \times & \times \\ : & : & : \end{bmatrix} \xrightarrow{\Delta_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ + & + & + \\ : & : & : \end{bmatrix} \xrightarrow{\Delta_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times \\ + & + & + \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Si } |\Delta_2| > |\Delta_1| > |\Delta_3|]{\text{Si}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ : & : & : \\ + & + & + \end{bmatrix}$$

2ème série d'opérations :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ : & : & : \\ + & + & + \end{bmatrix} \xrightarrow{\Delta'_1} \begin{bmatrix} - & - & - \\ : & : & : \\ + & + & + \end{bmatrix} \xrightarrow{\Delta'_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ + & + & + \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Si } |\Delta'_1| > |\Delta'_2|]{\text{Si}} \begin{bmatrix} : & : & : \\ + & + & + \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} : & : & : \\ + & + & + \\ - & - & - \end{bmatrix} ; T = \begin{bmatrix} : & : & : \end{bmatrix}$$

3ème série d'opérations :

$$B = : ; Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{calcul de } E, R_3 \text{ et } M^{-1}$$

2 - Fonctionnement du programme

Il existe deux programmes, l'un fonctionnant sur 1130, l'autre sur 360. Ils se distinguent uniquement par le fait que celui fonctionnant sur 360 calcule en plus les valeurs propres de la matrice A du processus par H S B G et A T E I G.

Programme Principal

Nom du JOB : LULU

But : à partir du processus :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + D u + R_1 \\ y = H x + R_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} A = n \times n ; D = n \times r ; R_1 = n \times 1 \\ H = m \times n ; R_2 = m \times 1 \end{matrix}$$

calculer l'observateur de LUENBERGER

$$\begin{cases} \dot{z} = B z + Q y + E u + R_3 \\ \quad = B z + C x + T D u + T R_1 \\ x = K \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \end{cases} \quad B = (n-m) \times (n-m)$$

Taille : 2500 mots 1130 pour un vecteur d'état de dimension 3.

VI - SIMULATION -

Le processus choisi est la chaîne de température de la chaudière. Il est du type :

$$\begin{cases} \dot{X} = A X + D u + R_1 \\ Y = H X \end{cases}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & f \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & e \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ j \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Il faut observer x_2 , x_1 étant mesuré.

Le système est observable car :

$$P = \begin{bmatrix} H^T & A^T H^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C \\ 0 & f \end{bmatrix} \text{ est d'ordre 2}$$

Utilisons la méthode exposée en (B - 4 - b)

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad k_1, k_2, \text{ inconnues à déterminer}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = M A M^{-1} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} + M D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + M R_1$$

$$M A M^{-1} = \begin{bmatrix} f \frac{k_1}{k_2} + h & c k_1 - f \frac{k_1^2}{k_2} - h k_1 \\ \frac{f}{k_1} & c - f \frac{k_1}{k_2} \end{bmatrix}$$

$$M D = \begin{bmatrix} d k_1 & i k_2 & e k_1 \\ d & 0 & e \end{bmatrix}$$

$$M R_1 = \begin{bmatrix} g k_1 + j k_2 \\ g \end{bmatrix} ; \quad M^{-1} = \frac{1}{k_2} \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ 1 & -k_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{\dot{z}} &= \left(f \frac{k_1}{k_2} + h \right) \hat{z} + \left(c k_1 - f \frac{k_1^2}{k_2} - h k_1 \right) y + d k_1 u_1 + i k_2 u_2 \\ &+ e k_1 u_3 + g k_1 + j k_2 \end{aligned}$$

(28)

$$\hat{x}_2 = \frac{1}{k_2} z - \frac{k_1}{k_2} x_1$$

$$\begin{aligned} c &= - 0.0064935 \\ d &= 0.0081169 \\ e &= - 0.00064935 \\ f &= - 0.0064935 \\ g &= 0.012987 \\ h &= - 0.012048 \\ i &= 0.016566 \\ j &= - 0.66265 \end{aligned}$$

Le coefficient de $\hat{z}$ dans (28) doit être négatif et plus grand en valeur absolue que $|c|$ et $|h|$.

$k_1 = k_2 = 1$ convient parfaitement.

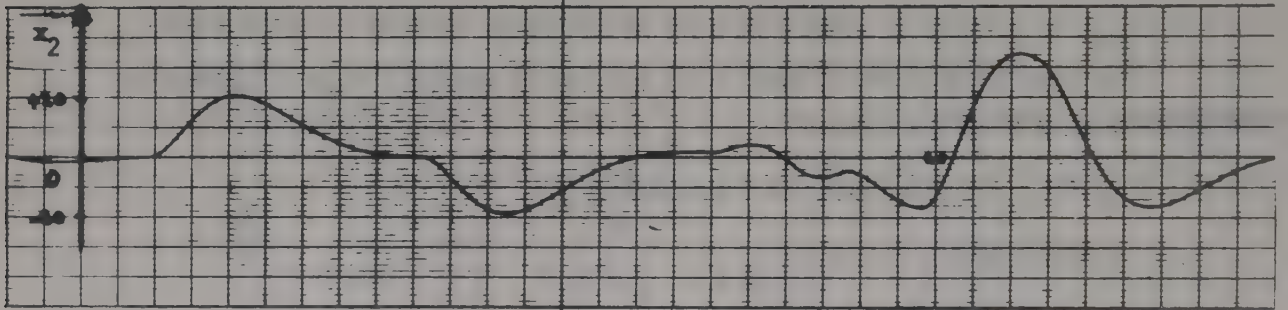
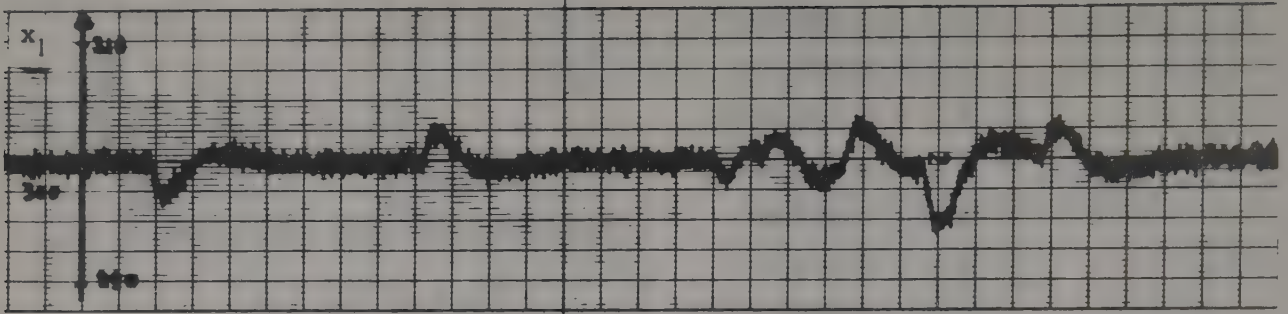
L'observateur devient :

$$\begin{aligned} \hat{\dot{z}} &= - 0.018541 \hat{z} + 0.012048 y + 0.0081170 u_1 + 0.016566 u_2 \\ &\quad - 0.00064935 u_3 - 0.64966 \end{aligned}$$

$$\hat{x}_2 = \hat{z} - x_1$$

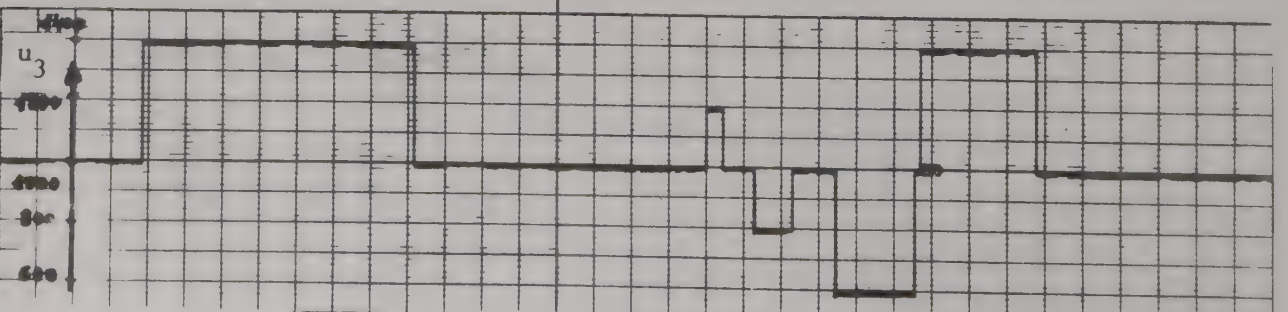
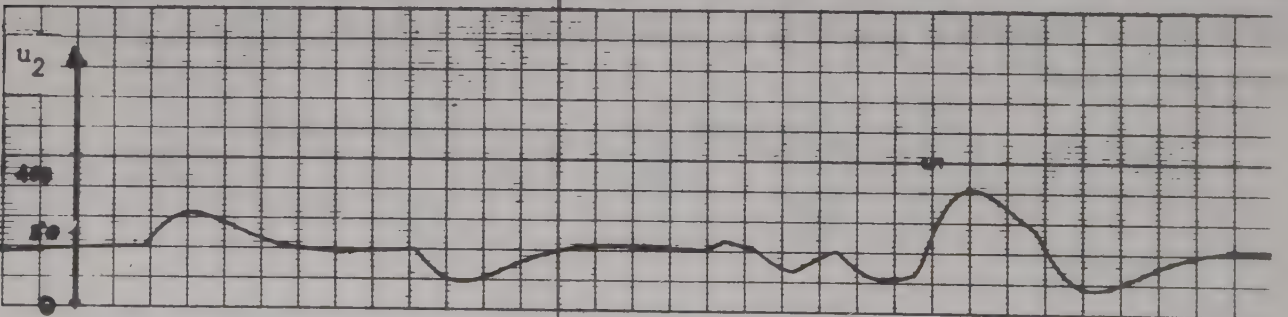
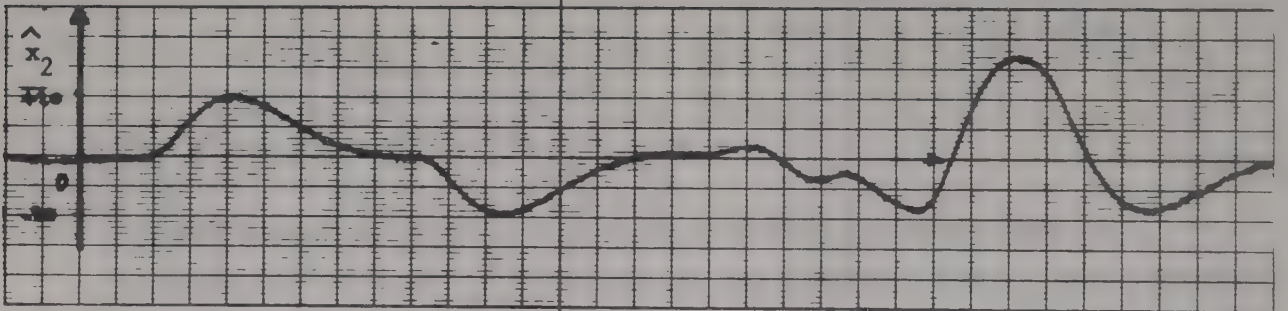
Essais :

Les essais ont été effectués en simulation sur le modèle décrit ci-dessus, avec un bruit additif sur la mesure de x_1 . On peut constater sur la figure ci-après que la reconstruction $\hat{x}_2$ est conforme à l'état x_2 , mais entachée d'un faible bruit. Il faut toutefois noter qu'en boucle fermée la commande serait élaborée à partir de x_1 mesuré et $\hat{x}_2$, c'est-à-dire qu'elle ne serait pas "lisse".



CLEVITE CORPORATION/BRUSH INSTRUMENTS DIVISION

CLEVELAND OHIO. PRINTED IN U.S.A.



BIBLIOGRAPHIE

- [B.1] - D.G. LUENBERGER - "Observing the state of a linear system"
I.E.E.E. Trans. on Military Electronics
Vol. MIL - 8, pages 74-80, Avril 1964
- [B.2] - D.G. LUENBERGER - "Observers for multivariable systems"
I.E.E.E. Trans. on Automatic Control
Vol. AC - II n°2, pages 190-197, Avril 1966
- [B.3] - D.G. LUENBERGER - Proceedings of the I.E.E.E., vol.58 n°11
BRYSON
Novembre 1970
- [B.4] - NASLIN - "Théorie de la commande et conduite optimale"
Chapitre 4, pages 69-77

Troisième Partie

APPLICATION AU PROCESSUS PILOTE

Chapitre 1

DESCRIPTION DU PROCESSUS

POSITION DU PROBLEME

INTRODUCTION -

Nous nous proposons dans cette 3ème partie d'expérimenter les théories de la régulation quadratique optimale sur une unité pilote. Cette mise en oeuvre sera réalisée aussi bien par voie analogique (chapitre 2) que numérique (chapitre 3).

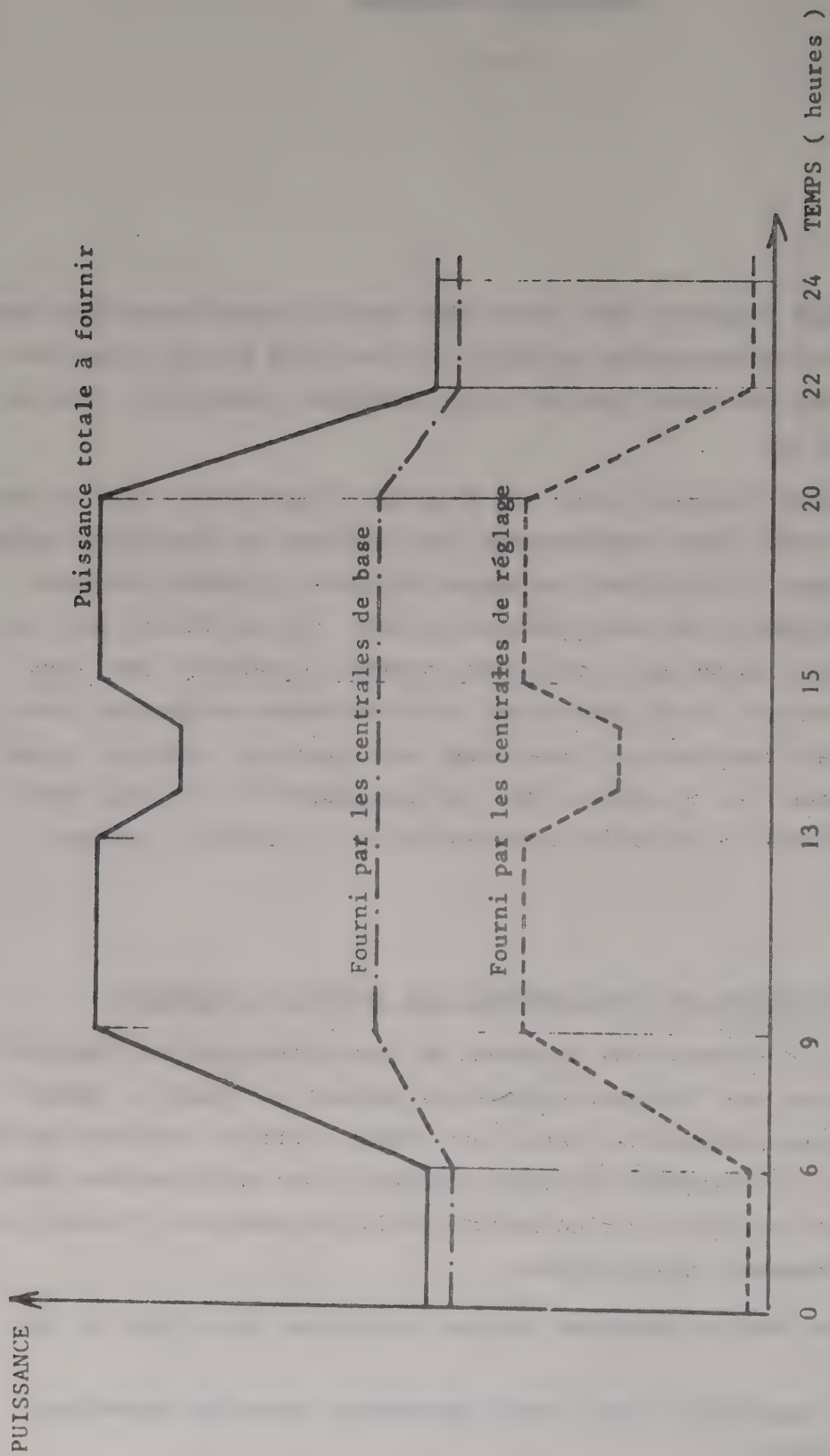
Le premier chapitre a pour but de poser le problème : dans un premier paragraphe nous citons succinctement les problèmes de régulation inhérent aux différents types de centrales thermiques existant en France, motivant l'étude de la régulation de notre processus pilote, qui est décrit dans un deuxième paragraphe. Après avoir brièvement énuméré le matériel dont nous disposons pour réaliser cette régulation, nous décrivons une méthode d'obtention d'un modèle mathématique, conduisant aux équations régissant le processus (paragraphe 4 et 5). Enfin, dans les paragraphes 6 et 7 nous considérons successivement la forme des perturbations et le choix du critère.

1 - Généralités sur le fonctionnement des centrales thermiques

A partir d'informations provenant du dispatching général installé à Paris, informations que l'on peut schématiser suivant la figure 1, chaque dispatching régional prévoit la charge pour chaque centrale, pour une période de 24 heures. A ces programmes de charge s'ajoutent des perturbations aléatoires, ayant pour origine les fluctuations de la consommation d'électricité, en fonction d'événements imprévisibles.

Dans une première approche, on peut distinguer deux types de centrales :

- les centrales de base (très importantes centrales thermiques, centrales nucléaires)
- les centrales de télé réglage (la plupart des centrales thermiques)



Shéma de la variation de la puissance sur le réseau Français, pour une période type de 24 heures.

- FIGURE 1 -

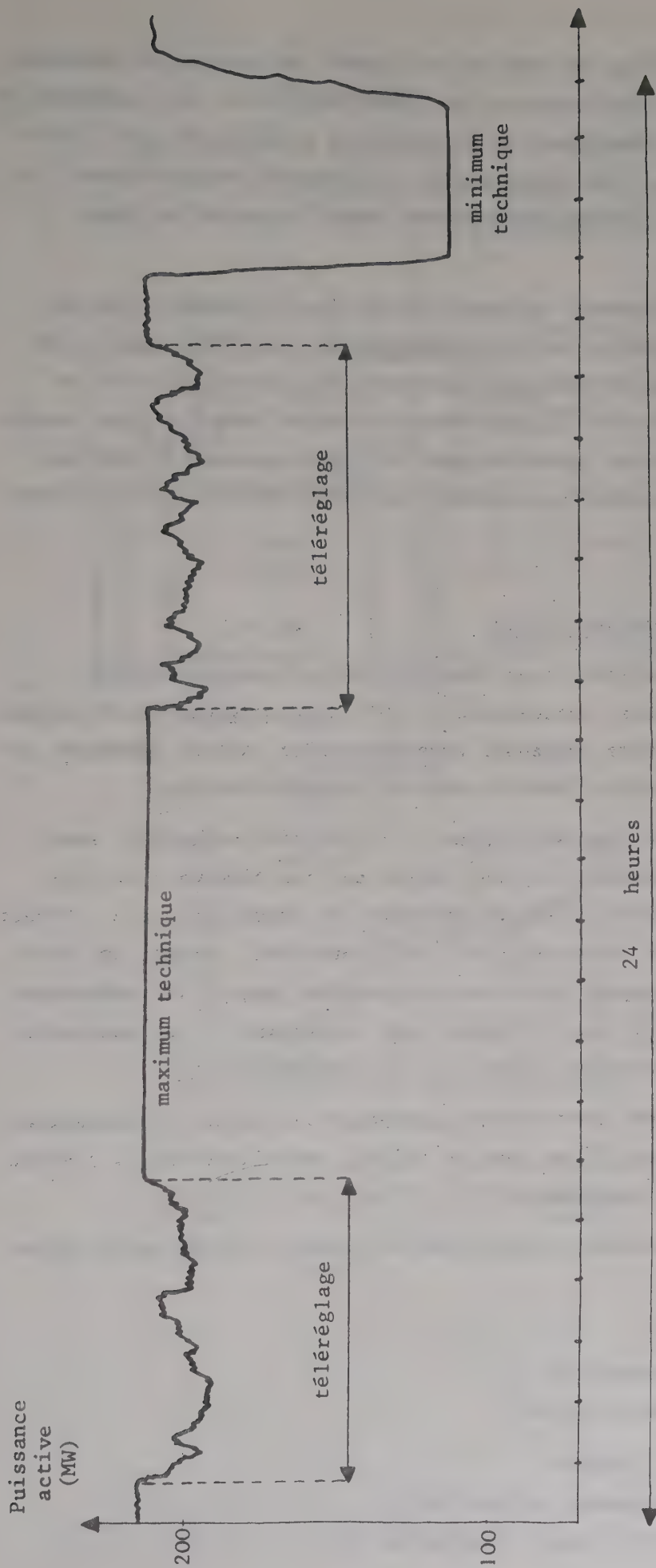


Fig. 2

Enregistrement type de la puissance active fournie par la centrale de NANTES-CHEVIRE
(groupes 3 et 4 - $p_s = 89$ bars - $t_s = 540^\circ\text{C}.$)

de moyenne puissance).

Le rôle des centrales de base est de fournir un quantum de puissance. Leurs variations de charge sont lentes et de faible amplitude. Les centrales de télé-régulation fournissent le complément de puissance et participent par là même au réglage de la fréquence. Elles fonctionnent à puissance essentiellement variable, aussi bien sur une période de 24 heures comme le montre la figure 2, qu'au cours d'une année.

Ces centrales présentent un grand intérêt pour l'automaticien, du fait des problèmes de régulation dus aux perturbations. En effet, quelle que soit la charge électrique de la centrale, autrement dit quelle que soit la demande de vapeur, la pression et la température de cette vapeur doivent rester entre des limites très étroites [pour un point de fonctionnement de 160 bars et de 550°C les écarts ne doivent pas excéder 5 % en pression et 10 % en température].

2 - Description du processus pilote

L'ensemble est constitué d'une chaudière marine pouvant débiter 1 500 kg/h de vapeur à 20 bars, surchauffée à 300°C dans un groupe turbo-dynamo de 85 KW. La vapeur est ensuite condensée sous atmosphère. Notons également que l'eau d'alimentation est traitée dans un poste de déminéralisation.

La chaudière est du type symétrique, à circulation naturelle, avec réchauffage des tubes de descente. On peut suivre sur les figures 3 et 4 le cycle eau - vapeur à surchauffe. L'eau alimentaire est pompée de A à B (30 bars), réchauffée dans les tubes de descente ($\rightarrow$ B') puis vaporisée, donnant un débit q_v à la pression p_b (C). La vapeur est alors surchauffée jusqu'à la température t_s (D) (débit q_s , pression p_s), puis détendue dans la turbine (E) et condensée (A). La désurchauffe s'effectue par injection d'un débit d'eau q_d .

Nous nous intéressons donc essentiellement à la chaîne de surchauffe, les autres régulations (niveau d'eau dans le ballon, ventelle d'air ...) étant réalisées par des procédés classiques.

Finalement, le problème de régulation principal de cette unité pilote concerne un système :

* à deux commandes :

- le débit de combustible q_c
- le débit de désurchauffe q_d

* à deux grandeurs réglées :

- la pression de vapeur surchauffée p_s
- la température de vapeur surchauffée t_s

* et à une perturbation prépondérante :

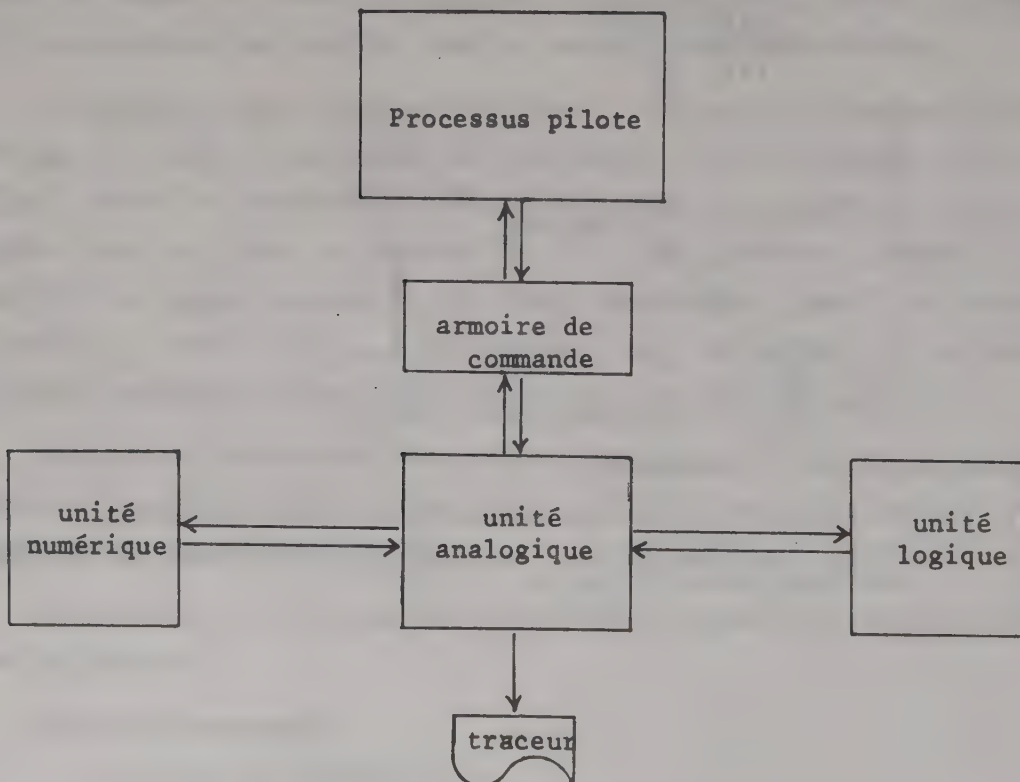
- le débit de vapeur à l'admission de la turbine (q_s) ; du fait que ce débit est assimilable à la puissance électrique demandée aux centrales thermiques, deux types de perturbations doivent être pris en considération :

- d'une part, des perturbations aléatoires de faible amplitude (10 à 20 %) effectuées autour d'une valeur de charge constante (légèrement au-dessous du maximum technique),

- d'autre part, des perturbations de grande amplitude en échelon ou en rampe, figurant la montée en charge, on en réenclenchement, et qui produisent la mise en saturation des organes de commande.

Dans chacun des cas, la régulation devra éviter, à la fois, des écarts de température et de pression importants ($> \pm 5^\circ\text{C}$ et $> 1 \text{ bar}$), et des variations de température néfastes sur les tubes de vaporisation ainsi que des injections brusques d'eau de désurchauffe.

3 - Description du matériel électronique pouvant être connecté au processus pilote



a - Armoire de commande

Les organes électromécaniques permettant la commande du processus pilote, ainsi que les capteurs permettant la mesure des diverses grandeurs physiques, sont connectés à une double armoire électronique de commande qui sert d'interface entre le calculateur analogique et le processus pilote.

b - Unité analogique

Cette unité est essentiellement constituée par un EAI TR 48.

c - Unité logique

Cette unité est constituée d'un EAI DES 30.

d - Unité numérique

Cette unité est constituée d'un EAI 640, dont les caractéristiques sont :

16 K mots de 16 bits

Cycle de base 1,6 μ s

L'unité numérique est reliée à l'unité analogique par :

16 convertisseurs analogique - digital

10 convertisseurs digital - analogique

L'unité numérique est reliée à l'unité logique par :

6 canaux d'interruption.

e - Traceur

Le traceur est un BRUSH MARK 260, permettant de tracer six courbes simultanément sur six voies parallèles.

4 - Identification du processus pilote

L'identification a pour but d'établir un modèle mathématique susceptible d'être exploité en termes de commande, c'est-à-dire tel que ses sorties soient égales à celles du processus sur une période donnée (généralement de l'ordre de la période d'optimisation), après une initialisation correcte, et ceci malgré sa structure volontairement simplifiée.

Deux approches sont complémentaires : on peut, dans un 1er temps, à partir des propriétés physiques du processus, déterminer un certain nombre

d'équations caractéristiques du système |B.1|.

La structure générale des équations étant ainsi définie, nous avons utilisé des enregistrements entrées-sorties pour déterminer les divers paramètres, en employant la démarche suivante :

a - Essais en boucle ouverte

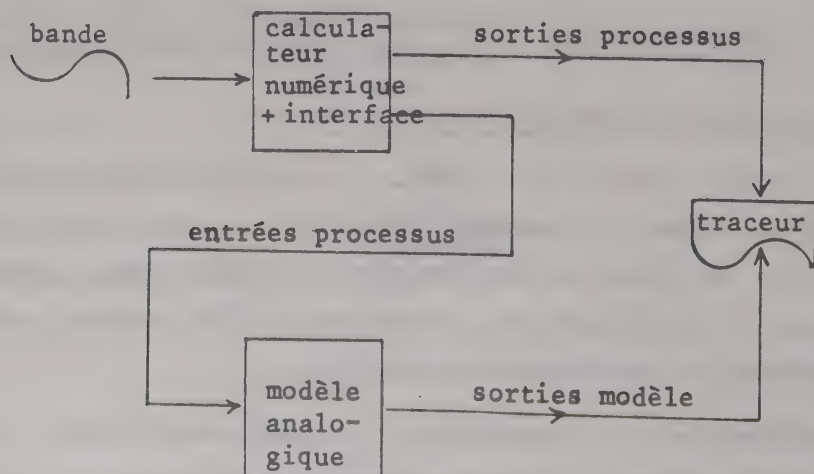
Des variations indicielles sont effectuées sur les trois entrées q_c (débit combustible), q_d (débit de désurchauffe), q_s (débit de vapeur), entraînant des variations des trois sorties mesurables p_b (pression ballon), p_s (pression de sortie), t_s (température de sortie). Ces entrées et ces sorties sont enregistrées sous forme de valeurs numériques échantillonnées (bande perforée par le calculateur numérique) et sous forme continue (traceur).

L'étude des courbes [entrées et sorties] permet de vérifier les structures déduites par les lois physiques et de déterminer approximativement les paramètres des équations.

Nous constatons que :

- p_b se comporte bien comme un intégrateur vis-à-vis de q_c , q_d , q_s ,
- t_s se comporte comme un premier ordre vis-à-vis de q_c , q_s et comme un deuxième ordre vis-à-vis de q_d ,
- p_s et p_b diffèrent d'un terme proportionnel au carré de q_s .

b - Un modèle, obéissant aux équations déterminées en "a", est câblé sur le calculateur analogique. Un programme numérique permet alors, d'une part, d'injecter à l'entrée du modèle les valeurs précédemment appliquées au processus réel, d'autre part, d'enregistrer sur le traceur de courbes les sorties réelles et sorties simulées.



Pouvant ainsi comparer les sorties du processus et de son modèle, il est possible de modifier les paramètres du modèle jusqu'à rendre ses sorties voisines de celles du processus, dans les limites d'une certaine tolérance.

5 - Equations de la chaîne de pression et de température

L'application de la méthode décrite au paragraphe précédent conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{p}_b = 0.396 \times 10^{-3} q_c + 0.325 \times 10^{-4} (q_d - q_s) \\ \dot{t}_s = \frac{1}{154} [- (t_s - 2) + 1.25 (q_c - 80) - 0.1 (q_s - 1000) - x_3] \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{83} [- x_3 + 1.375 (q_d - 40)] \\ p_s = p_b - 1.225 \left(\frac{q_s}{1000} \right)^2 \end{cases}$$

p_b et p_s représentent des écarts de pression autour de la valeur moyenne de 20 bars.

t_s représente les écarts de température autour de la valeur moyenne de 300°C.

Les débits sont exprimés en kg/h,

Les temps en seconde,

Les températures en degrés celsius,

Les pressions en bar.

Calibres : En vue du câblage analogique, indiquons les "calibres" :

(les résultats sont présentés sous la forme $\frac{x}{x_m}$. Il faut lire: le calibre de la variable x est x_m)

$$\frac{p_s}{5}, \frac{p_b}{5}, \frac{t_s}{100}, \frac{x_3}{100}, \frac{q_c}{200}, \frac{q_d}{200}, \frac{q_s}{2000}, \frac{u_1}{10}, \frac{u_2}{10}, \frac{\dot{p}_b}{0.02}, \frac{\dot{t}_s}{0.4}, \frac{\dot{x}_3}{0.4}, \frac{\dot{q}_c}{10}, \frac{\dot{q}_d}{10}$$

6 - Forme des perturbations

Les variations du débit de vapeur autour de sa valeur moyenne Q_s sont aléatoires et donc représentées par un modèle statistique.

Posons : $\delta q_s = q_s - Q_s$

L'observation des enregistrements (tels que celui de la figure 2), où apparaissent fréquemment des formes exponentielles, suggère un modèle de MARKOV du premier ordre :

$$\delta \dot{q}_s = \frac{1}{\tau} \delta q_s + w$$

w : bruit blanc gaussien
centré
τ : constante de temps.

Ce modèle signifie que, mesurant δq_s à l'instant t_1 , la meilleure prédiction que l'on puisse faire à l'instant t est $\delta q_s(t_1) e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}$. Mais τ s'avérant grand devant le temps de réponse présumé du système en boucle fermée, le modèle de δq_s est simplifiable en $\delta \dot{q}_s = w$.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que δq_s reste constant pendant la période d'optimisation.

7 - Choix du critère de régulation

q_s étant mesuré continûment, il apparaît une nouvelle information à chaque instant. En conséquence, un critère d'optimisation en $[t, t+T]$ s'impose. Afin de limiter les écarts en pression et en température d'une part, les gradients de température sur les tubes de chauffe et de surchauffe et le vieillissement des injecteurs de désurchauffe d'autre part, on prendra un critère de la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (\tau_s^2 + \alpha^2 p_s^2 + \delta^2 \dot{q}_c^2 + \epsilon^2 \dot{q}_d^2) dt$$

où, par exemple, α vaut 4 si l'on considère qu'un écart de 1 bar est aussi fâcheux qu'un écart de température de 4°C.

La présence dans le critère des dérivées des débits d'entrée q_c et q_d nécessite, sur le plan théorique, de traiter ces derniers comme des états.

Le modèle utilisé devra donc se voir adjoindre les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{q}_c = u_1 \\ \dot{q}_d = u_2 \end{cases}$$

Les "états" q_c et q_d , étant mesurés de façon précise, ne seront pas estimés.

Chapitre 2

REGULATION ANALOGIQUE

A - ESSAIS SUR PROCESSUS - MODELE A SIX ETATS -

1 - Position du problème

Les équations sont du type :

$$\begin{cases} \dot{X} = A X + D u + R_1 + w \\ Y = H X + \mu + v \end{cases}$$

Il faut trouver u minimisant :

$$J = E \left\{ \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (Y^T Q Y + u^T R u) dt \mid Y(\tau) \right\}$$

$$\tau \in [t, t+T]$$

w représentant les bruits d'équation de densité spectrale de puissance ψ
 v représentant les bruits de mesure de densité spectrale de puissance ϕ
 w et v sont des bruits blancs gaussiens centrés.

Conformément à ce qui a été trouvé lors de l'identification [3ème partie - 1 - 5, 6 et 7], et en posant $q_s = 1000 + \delta q_s$, les valeurs numériques sont :

$$\begin{array}{l} \text{Equations d'état} \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_b = 0.396 \times 10^{-3} q_c + 0.325 \times 10^{-4} (q_d - \delta q_s) - 0.325 \times 10^{-1} + w_1 \\ \dot{t}_s = \frac{1}{154} [-(t_s - 2) + 1.25 (q_c - 80) - 0.1 \delta q_s - x_3] + w_2 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{83} [-x_3 + 1.375 (q_d - 40)] + w_3 \\ \dot{q}_c = u_1 \\ \dot{q}_d = u_2 \\ \dot{\delta q}_s = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Equations de mesure
(linéarisées)

$$\begin{aligned} y_1 &= p_b - 1.225 \left(1 + 2 \frac{\delta q_s}{1000}\right) + v_1 \\ y_2 &= t_s + v_2 \\ y_3 &= q_c \\ y_4 &= q_d \\ y_5 &= \delta q_s \end{aligned}$$

Critère $J = E \left\{ \frac{1}{2} \int_t^{t+600} (16 y_1^2 + y_2^2 + 30 u_1^2 + 30 u_2^2) dt / Y(\tau) \right\}$

$\tau \in [t, t+T]$

La densité spectrale de puissance du bruit de mesure v s'obtient par observation du signal de sortie.

La densité spectrale de puissance du bruit d'équation w est obtenue, après comparaison de la sortie du processus et celle de son modèle, à l'aide des formules de transmissions des signaux aléatoires (BRYSON 1 - page 331) et (|B.2| - page 69).

Les valeurs numériques sont :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.133 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0.615 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

2 - Optimaliseur

Ce problème satisfaisant les conditions d'application du principe de séparation (processus linéaire, critère quadratique, bruits blancs gaussiens), l'optimaliseur sera calculé à partir des équations déterministes :

$$\begin{cases} \dot{X} = A X + D u + R_1 \\ Y = H X + \mu \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (Y^T Q Y + u^T R u) dt$$

la solution étant du type :

$$u = - R^{-1} D^T [K x(t) - g]$$

K et g étant solutions d'équations récurrentes établies en [1ère partie - 3 et 5]

La commande sera donnée par :

$$u_1 = - \frac{1}{\delta^2} [K_{41} p_b + K_{42} t_s + K_{43} x_3 + K_{44} q_c + K_{45} q_d + K_{46} \delta q_s - g_4]$$

$$u_2 = - \frac{1}{\epsilon^2} [K_{51} p_b + K_{52} t_s + K_{53} x_3 + K_{54} q_c + K_{55} q_d + K_{56} \delta q_s - g_5]$$

Soit :

$$u_1 = - \frac{1}{30} [+ 9.37 p_b + 4 t_s - 0.77 x_3 + 1.46 q_c - 0.21 q_d - 284 \delta q_s - 117]$$

$$u_2 = - \frac{1}{30} [+ 19.8 p_b - 1.33 t_s + 0.54 x_3 - 0.21 q_c + 0.73 q_d - 78.6 \delta q_s - 37.5]$$

3 - Reconstructeur

Le reconstructeur choisi est un filtre de KALMAN, conduisant aux équations suivantes :

$$\hat{X} = A \hat{X} + D u + R_1 + L (Y - H \hat{X} - \mu)$$

Rappelons que les variables d'état q_c et q_d étant mesurées exactement, l'estimation portera sur p_b , t_s , x_3 . Les grandeurs q_c , q_d , δq_s seront interprétées dans les équations de KALMAN comme des quantités déterministes connues.

La matrice L, calculée grâce à un programme d'intégration numérique [programme RICCATI], puis ajustée sur le montage analogique, est représentée ci-après :

$$L = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.325 \\ 0 & 0.0312 \end{bmatrix}$$

Les zéros de cette matrice mettent en évidence le fait que le terme correctif de l'équation de pression est fonction uniquement de la mesure portant sur la pression, et que le terme correctif des équations de température est fonction uniquement de la mesure portant sur la température.

Les équations de l'estimateur de KALMAN, exposées en [2ème partie - chapitre 2], sont :

$$\begin{cases} \hat{p}_b = 0.396 \times 10^{-3} q_c - 0.325 \times 10^{-4} (q_d - q_s) + 0.05 [y_1 - \hat{p}_b + 1.225 (1 + 2 \frac{\delta q_s}{1000})] \\ \hat{t}_s = -0.65 \times 10^{-2} t_s - 0.65 \times 10^{-2} x_3 + 0.81 \times 10^{-2} q_c - 0.65 \times 10^{-3} \delta q_s - 0.638 \\ \quad + 0.325 [y_2 - \hat{t}_s] \\ \hat{x}_3 = -0.12 \times 10^{-1} x_3 + 0.165 \times 10^{-1} q_d - 0.66 + 0.0312 [y_2 - \hat{t}_s] \end{cases}$$

4 - Equations calibrées de l'ensemble estimateur - optimaliseur [Les calibres sont donnés en 3ème partie - 1 - 5]

Estimateur

$$\begin{cases} \hat{p}_b = \frac{1}{5} [0.0792 Q_c - 0.0650 Q_s + 0.0065 Q_d + 0.25 (y_1 - \hat{p}_b + 0.98 \delta Q_s + 0.245)] \\ \hat{T}_s = 0.0065 [-\hat{T}_s - \hat{x}_3 + 2.5 Q_c - 2 \delta Q_s - 0.98 + 50 (y_2 - \hat{T}_s)] \\ \hat{x}_3 = 0.012 [-\hat{x}_3 + 2.75 Q_d - 0.55 + 2.6 (y_2 - \hat{T}_s)] \end{cases}$$

Optimaliseur

$$\begin{cases} U_1 = -0.156 \hat{p}_b - 1.335 \hat{T}_s + 0.257 \hat{x}_3 - 0.972 Q_c + 0.1405 Q_d \\ \quad + 0.946 \delta Q_s + 0.39 \\ U_2 = -0.33 \hat{p}_b + 0.444 \hat{T}_s - 0.181 \hat{x}_3 + 0.1405 Q_c - 0.487 Q_d \\ \quad + 0.262 \delta Q_s + 0.125 \end{cases}$$

Calcul des débits

$$\begin{cases} \dot{Q}_c = \frac{1}{20} U_1 \\ \dot{Q}_d = \frac{1}{20} U_2 \end{cases}$$

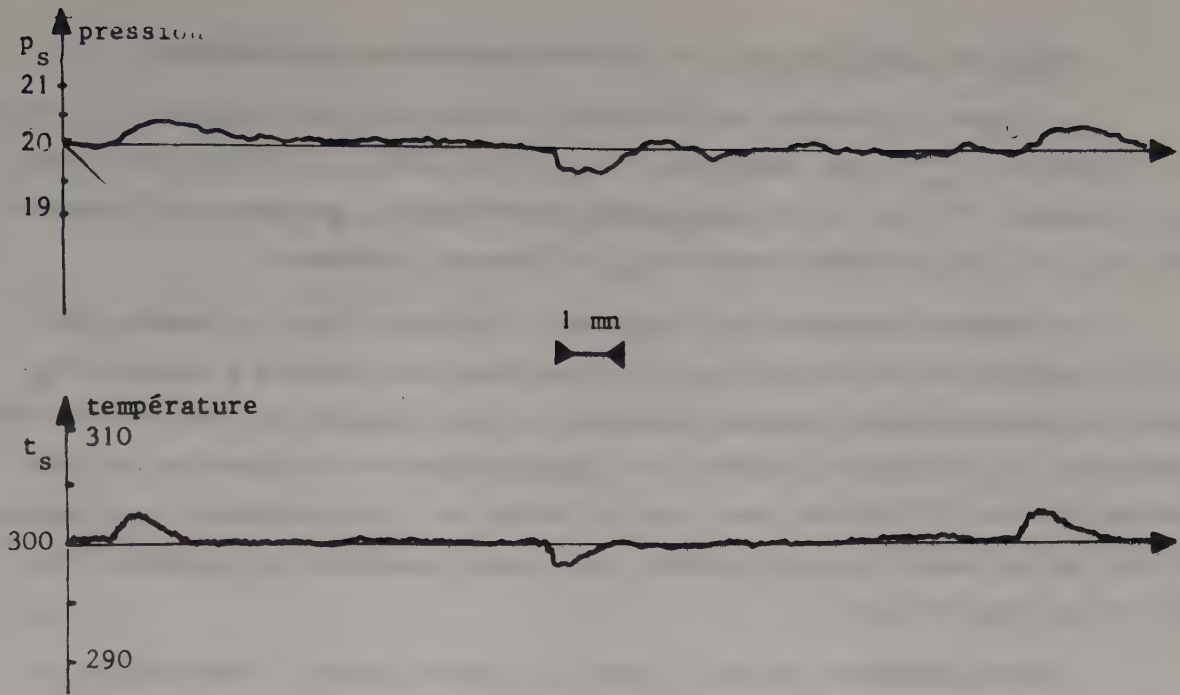
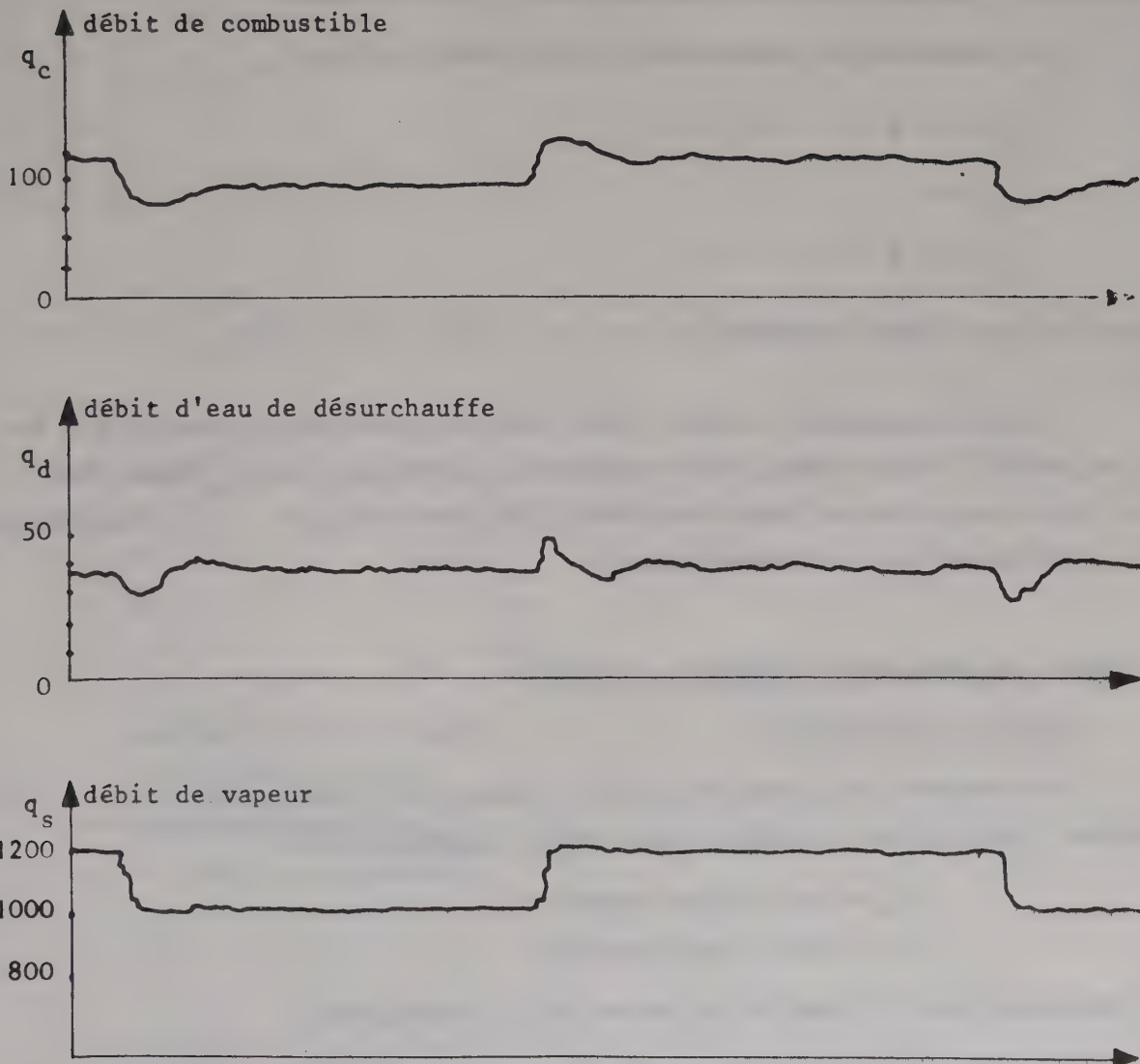


Fig. 5



Réponses du générateur à des échelons de vapeur (pas de signaux de Wiener additifs).

5 - Résultats expérimentaux (cf. schémas analogiques en annexe 1)

La figure 5 concerne les résultats obtenus. On peut observer les réponses en pression (p_g) et en température (t_g) à des échelons de débit de vapeur (q_g) atteignant 20 % de la valeur nominale (1000 kg/h). Les débits de combustible (q_c) et d'eau de désurchauffe (q_d) y figurent également.

On remarque notamment un "statisme" atteignant pour la température 2°C. Ce statisme est dû au fait que l'optimaliseur est calculé à partir d'un modèle du processus plus ou moins simplifié et donc erroné. Au lieu de chercher à améliorer la précision du modèle, par augmentation de sa dimension, ce qui engendrerait des difficultés tant pour le calcul de l'optimaliseur - estimateur que lors de la phase d'identification, nous avons considéré le problème d'un point de vue statistique.

L'écart permanent apparaît comme une dérive lente. L'idée naturelle consiste à assimiler cette dérive à un bruit de WIENER dans les équations de mesures, et à estimer cette dérive grâce au filtre de KALMAN.

Les équations de température seront alors du type :

$$\begin{cases} \dot{X} = A X + D u + R_1 + w \\ \dot{\epsilon} = \alpha \\ Y = H X + \mu + \epsilon + v \end{cases}$$

α étant un bruit blanc gaussien.

Dans le paragraphe suivant, nous considérerons cette correction d'erreur de modèle. D'autre part, nous réintroduirons le fait que δq_g peut, lui aussi, être assimilé à un bruit de WIENER [cf. 3ème partie - 1 - 6], et, par ce fait, sera estimé par le reconstituteur.

B - ESSAIS EN SIMULATION - MODELE A 7 ETATS -

1 - Position du problème

Conformément aux considérations du paragraphe [3ème partie - 2 - A - 5] précédent, nous allons introduire deux états supplémentaires :

$$\begin{aligned} \dot{\delta q}_g &= \text{bruit blanc gaussien} \\ \dot{x}_7 &= \text{bruit blanc gaussien} \end{aligned}$$

x_7 intervenant dans l'équation de mesure de la température.

Les équations deviennent :

$$\dot{p}_b = a q_c + b q_d - b \delta q_s - b Q_s + w_1$$

$$\dot{t}_s = e [-t_s + f + g (q_c - 80) - h \delta q_s - x_3] + w_2$$

$$\dot{x}_3 = c [-x_3 + d (q_d - 40)] + w_3$$

$$\dot{q}_c = u_1$$

$$\dot{q}_d = u_2$$

$$\delta \dot{q}_s = w_4$$

$$\dot{x}_7 = w_5$$

$$y_1 = p_b - \frac{2\ell}{Q_s} \delta q_s - \ell + v_1$$

$$y_2 = t_s + x_7 + v_2$$

$$y_3 = q_c$$

$$y_4 = q_d$$

$$J = E \left\{ \frac{1}{2} \int_t^{t+T} [(y_2)^2 + \alpha^2 y_1^2 + \delta^2 u_1^2 + \epsilon^2 u_2^2] dt \right\}$$

$$a = 0.396 \cdot 10^{-3}$$

$$f = 2$$

$$\alpha^2 = 16$$

$$b = 0.325 \cdot 10^{-4}$$

$$g = 1.25$$

$$\delta^2 = \epsilon^2 = 30$$

$$c = 0.12 \cdot 10^{-1}$$

$$h = 0.1$$

$$T = 600$$

$$d = 1.375$$

$$\ell = 1.225$$

$$e = 0.65 \cdot 10^{-2}$$

$$Q_s = 1000$$

Les débits sont en kg/h

Les pressions en bar

Les températures en °C

Le temps en secondes.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.133 \cdot 10^{-4} & & & & \\ & 0.615 \cdot 10^{-2} & & & 0 \\ & & 0.36 & & \\ & 0 & & 10^{-3} & \\ & & & & 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

La résolution du problème se fait de façon identique à celle de A.

2 - Optimaliseur

$$u_1 = \frac{1}{30} [- 9.37 p_b - 4 t_s + 0.771 x_3 - 1.46 q_c + 0.211 q_d + 0.14 \delta q_s \\ - 4.95 x_7 + 117.58]$$

$$u_2 = \frac{1}{30} [- 19.8 p_b + 1.33 t_s - 0.544 x_3 + 0.211 q_c - 0.731 q_d + 0.034 \delta q_s \\ + 2.34 x_7 + 37.35]$$

3 - Estimateur

q_c et q_d sont parfaitement mesurés, puisque fournis par le calculateur analogique. Il faut estimer p_b , t_s , x_3 , δq_s , x_7 .

La matrice de gain du filtre de KALMAN est :

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.042 \\ 0 & -0.3 \\ -800 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_b &= a q_c + b q_d - b \delta \hat{q}_s - b Q_s + L_{11} (y_1 - \hat{p}_b + \frac{2\ell}{Q_s} \delta \hat{q}_s + \ell) \\ \hat{t}_s &= e [- \hat{t}_s + f + g (q_c - 80) - h \delta \hat{q}_s - \hat{x}_3] + L_{22} (y_2 - \hat{t}_s - \hat{x}_7) \\ \hat{x}_3 &= c [- \hat{x}_3 + d (q_d - 40)] + L_{32} (y_2 - \hat{t}_s - \hat{x}_7) \\ \delta \hat{q}_s &= L_{41} (y_1 - \hat{p}_b + \frac{2\ell}{Q_s} \delta \hat{q}_s + \ell) \\ -\hat{x}_7 &= L_{52} [y_2 - \hat{t}_s - \hat{x}_7] \end{aligned}$$

4 - Equations calibrées du processus, de l'estimateur, de l'optimaliseur

(cf. schéma analogique en annexe 1 bis)

Processus

$$\begin{aligned}\dot{P}_b &= 0.0792 Q_c + 0.00650 Q_d - 0.065 Q_s \\ \dot{T}_s &= 0.0325 [-T_s + 2.5 Q_c - 2 Q_s - X_3 + 0.02] \\ \dot{X}_3 &= 0.060 [-X_3 + 2.75 Q_d - 0.55] \\ \dot{Q}_c &= 0.25 U_1 \\ \dot{Q}_d &= 0.25 U_2 \\ \delta \dot{Q}_s &= 0 \\ \dot{X}_7 &= 0\end{aligned}$$

Mesures

$$\begin{aligned}Y_1 &= P_b - 0.98 \delta q_s - 0.245 \\ Y_2 &= T_s + X_7 \\ Y_3 &= Q_c \\ Y_4 &= Q_d\end{aligned}$$

Estimateur

$$\begin{aligned}\hat{P}_b &= 0.0792 Q_c + 0.0065 Q_d - 0.065 \hat{Q}_s + 10 [Y_1 - \hat{P}_b + 0.98 \delta \hat{Q}_s + 0.245] \\ \hat{T}_s &= 0.0325 [-\hat{T}_s + 2.5 Q_c - 2 \hat{Q}_s - \hat{X}_3 + 0.02] + 0.21 [Y_2 - \hat{T}_s - \hat{X}_7] \\ \hat{X}_3 &= 0.060 [-\hat{X}_3 + 2.75 Q_d - 0.55] - 1.48 [Y_2 - \hat{T}_s - \hat{X}_7] \\ \delta \hat{Q}_s &= 10 [Y_1 - \hat{P}_b + 0.98 \delta \hat{Q}_s + 0.245] \\ \hat{X}_7 &= 0.2 [Y_2 - \hat{T}_s - \hat{X}_7]\end{aligned}$$

Optimaliseur

$$\begin{aligned}U_1 &= -0.156 \hat{P}_b - 1.335 \hat{T}_s + 0.257 \hat{X}_3 - 0.972 Q_c + 0.1405 Q_d + 0.993 \delta \hat{q}_s - 1.65 \hat{X}_7 + 0.3912 \\ U_2 &= -0.33 \hat{P}_b + 0.444 \hat{T}_s - 0.181 \hat{X}_3 + 0.1405 Q_c - 0.487 Q_d + 0.2152 \delta \hat{q}_s + 0.783 X_7 + 0.123\end{aligned}$$

5 - Résultats expérimentaux

La figure 6-a montre qu'un écart de 10 % entre le terme δ [cf. équation de mesure y_1 en B-1] du processus et celui du modèle, non seulement n'influe pas sur le régime permanent, mais ne dégrade nullement les transitoires.

Si, cependant, cet écart atteint 50 % (figure 6-b), la représentation de l'erreur d'équation par un signal de WIENER n'est plus suffisante et ne permet plus de conserver les transitoires.

Cette caractéristique est encore plus sensible si le terme h [cf. équation de température en B - 1] est erroné [figure 7]. En 7-a, l'erreur est de 20 % et il n'y a pas dégradation des transitoires, tandis qu'en 7-b l'erreur atteint 50 % et le système est devenu très lent (à noter que l'échelle du temps a doublé sur cet enregistrement).

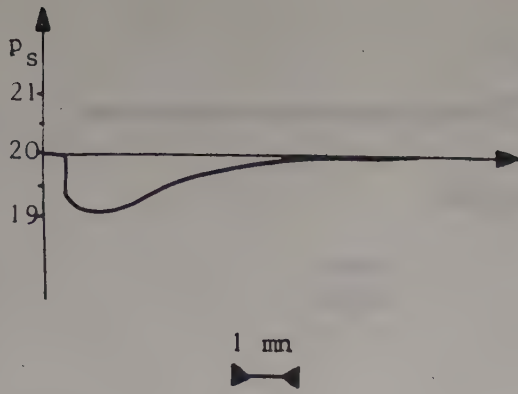


Fig. 6-a

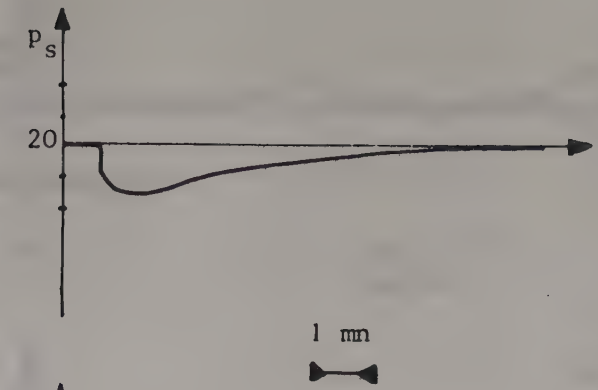
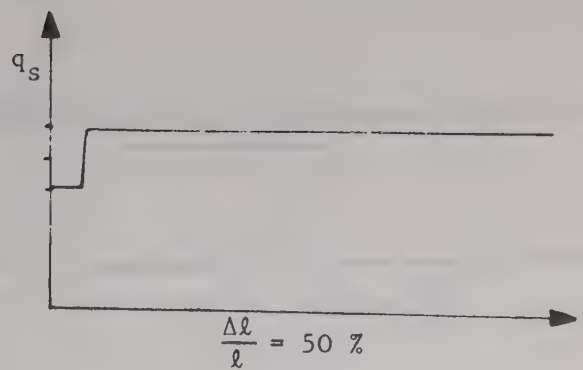
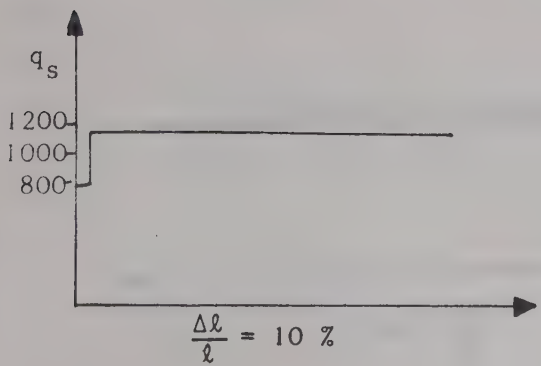
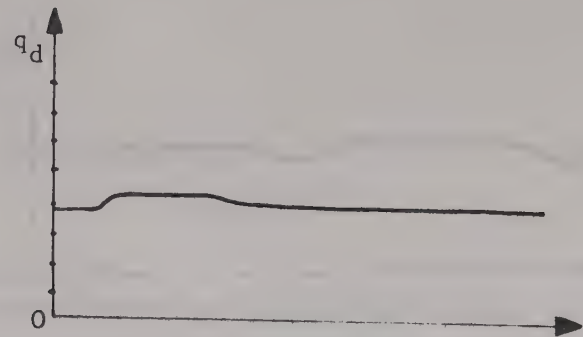
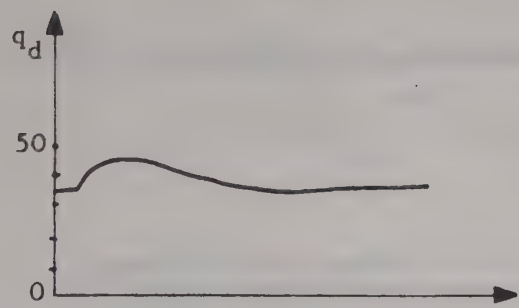
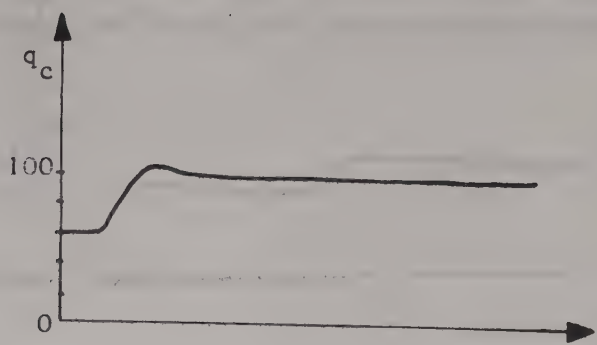
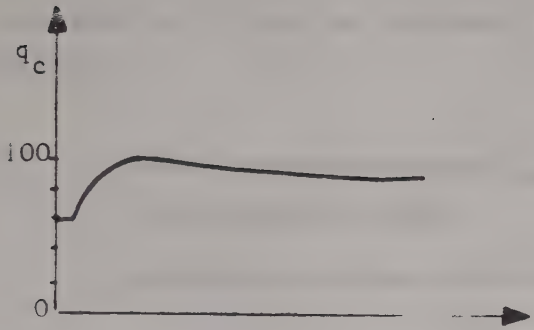
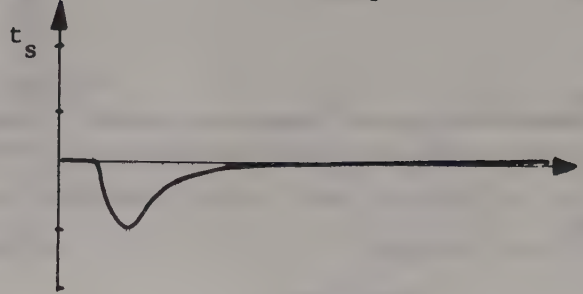
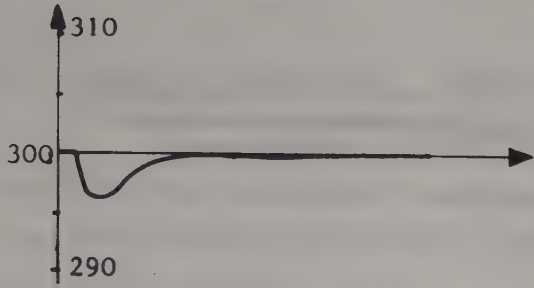


Fig. 6-b



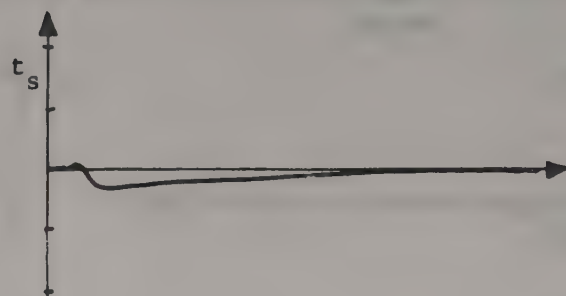
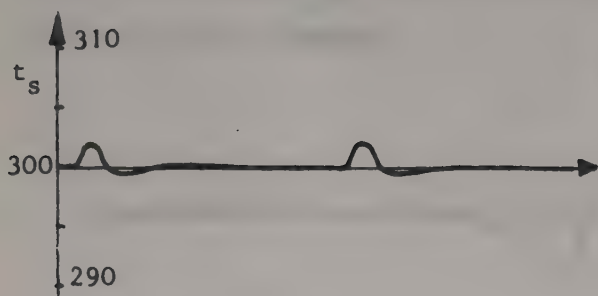
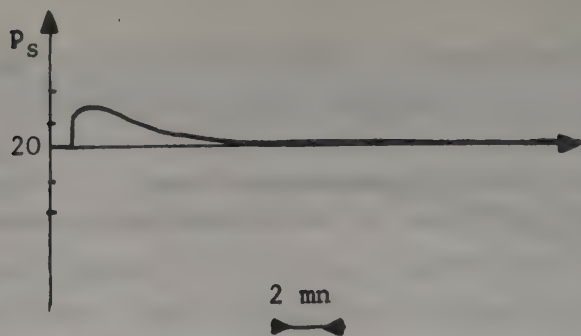
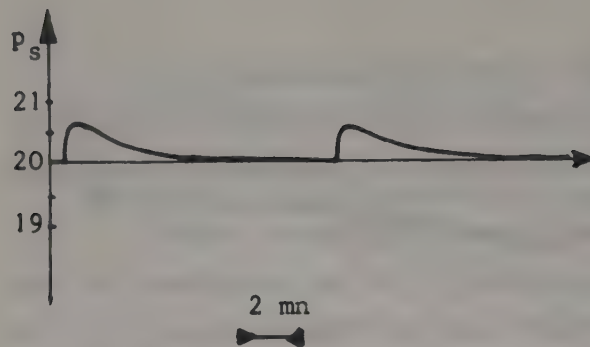
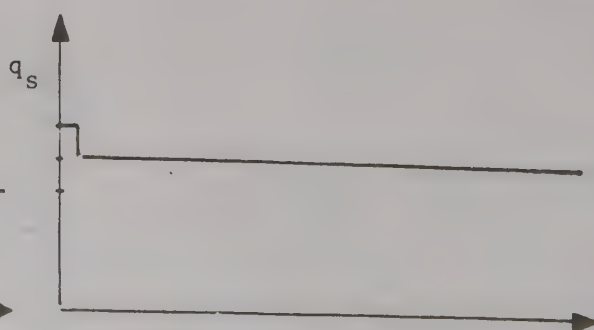
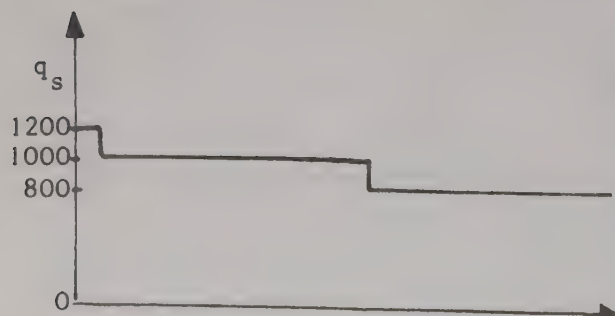
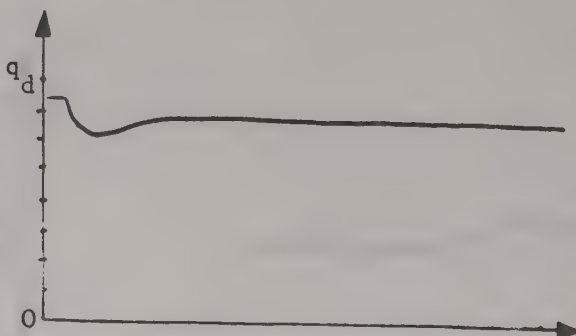
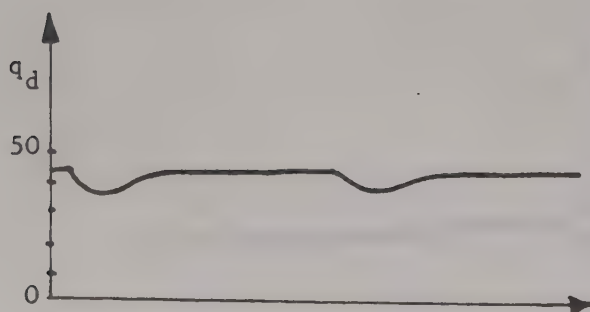
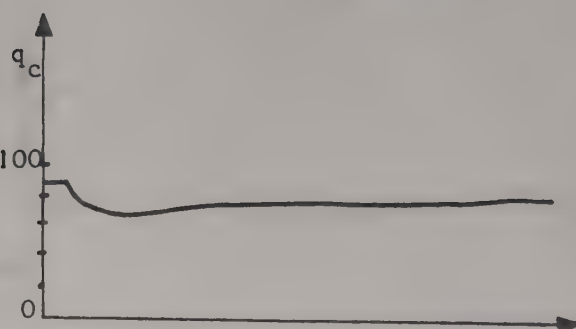


Fig. 7-a

Fig. 7-b



$\frac{\Delta h}{h} = 20 \%$

$\frac{\Delta h}{h} = 50 \%$

Chapitre 3

REGULATION NUMERIQUE

A - ESSAIS EN SIMULATION - MODELE A 7 ETATS -

On se propose ici de commander le processus décrit en [3ème partie - 1] à l'aide d'un calculateur numérique. Le problème traité tient compte de la correction des erreurs de modèle [3ème partie - 2 - B - 5], il comporte donc 7 variables d'état.

Les étapes de résolution sont les mêmes que dans le cas continu, à ceci près qu'il faut au préalable exprimer les équations continues sous forme discrète.

1 - Position du problème

Le processus étant identifié sous forme continue :

$$\begin{cases} \dot{X} = A X + D u + R_1 + w \\ Y = H X + \mu + v \end{cases}$$

trouver la commande u qui minimise :

$$J = E \left\{ \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (Y^T Q_1 Y + u^T R u) dt / Y(\tau) \right\}$$
$$\tau \in [t, t+T]$$

Le processus sera commandé numériquement, en le supposant muni d'un bloqueur d'ordre zéro sur ses commandes, et d'un échantillonneur sur ses sorties.

a - Les équations continues sont rappelées ci-après :

$$\begin{cases}
 \dot{p}_b = 0.410 \times 10^{-3} q_c + 0.337 \times 10^{-4} q_d - 0.337 \times 10^{-4} \delta q_s - 0.337 \times 10^{-1} + w_1 \\
 \dot{t}_s = -0.667 \times 10^{-2} t_s - 0.667 \times 10^{-2} x_3 + 0.1 \times 10^{-1} q_c - 0.533 \times 10^{-3} \delta q_s - 0.78 + w_2 \\
 \dot{x}_3 = -0.2 \times 10^{-1} x_3 + 0.12 \times 10^{-1} q_d - 0.48 + w_3 \\
 \dot{q}_c = u_1 \\
 \dot{q}_d = u_2 \\
 \dot{\delta q}_s = w_4 \\
 \dot{x}_7 = w_5
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 y_1 = p_b - 1.6 \times 10^{-3} \delta q_s - 0.8 + v_1 = p_s \text{ mesuré} \\
 y_2 = t_s + x_7 + v_2 = t_s \text{ mesuré} \\
 y_3 = q_c \\
 y_4 = q_d
 \end{cases}$$

$$J = E \left\{ \frac{1}{2} \int_t^{t+T} [(y_2)^2 + 16 (y_1)^2 + 30 u_1^2 + 30 u_2^2] dt \right\}$$

$$\Phi = E \{w^T w\} = \begin{bmatrix} 0.133 \times 10^{-4} & & & \\ & 0.615 \times 10^{-2} & & 0 \\ & & 0.36 & \\ & 0 & & 10^{-3} \\ & & & & 10^{-3} \end{bmatrix} \times 10$$

$$\Phi' = E \{v^T v\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \times \frac{1}{10}$$

Remarque : Les paramètres de ces équations, correspondant à une 2ème identification exigée par un changement d'organes mécaniques, ne sont pas exactement les mêmes que celles du chapitre précédent.

b - Grâce à la méthode développée dans [1ère partie - chapitre 2 - II] les équations continues précédentes peuvent s'exprimer sous la forme discrète :

$$\begin{cases}
 X_{t+1} = P X_t + Q u_t + \chi + w \\
 Y_t = H X_t + \mu_t + v
 \end{cases}$$

Soit : (la période d'échantillonnage Δt a été choisie égale à 10 s)

$$p_{b \ t+1} = 0.41 \ 10^{-2} q_{c \ t} + 0.337 \ 10^{-3} q_{d \ t} - 0.337 \ 10^{-3} \delta q_{s \ t} + 0.205 \ 10^{-1} u_1 + 0.168 \ 10^{-2} u_2 - 0.337 + w_1$$

$$t_{s \ t+1} = 0.935 \ t_{s \ t} - 0.584 \ 10^{-1} x_3 \ t + 0.967 \ 10^{-1} q_{c \ t} - 0.366 \ 10^{-2} q_{d \ t} - 0.516 \ 10^{-2} \delta q_{s \ t} + 0.489 \ u_1 \ t - 0.124 \ 10^{-1} u_2 \ t - 7.4 + w_2$$

$$x_3 \ t+1 = 0.819 \ x_3 \ t + 0.109 \ q_{d \ t} - 4.35 + w_3$$

$$q_{c \ t+1} = q_{c \ t} + 10 \ u_1 \ t$$

$$q_{d \ t+1} = q_{d \ t} + 10 \ u_2 \ t$$

$$\delta q_{s \ t+1} = \delta q_{s \ t} + w_4$$

$$x_7 \ t+1 = x_7 \ t + w_5$$

$$y_1 \ t = p_{b \ t} - 0.16 \ 10^{-2} \delta q_{s \ t} - 0.8 + v_1$$

$$y_2 \ t = t_{s \ t} + x_7 \ t + v_2$$

$$y_3 \ t = q_{c \ t}$$

$$y_4 \ t = q_{d \ t}$$

$$J = E \left\{ \frac{1}{2} \sum_i^{i+N} Y_i^T \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Y_i + u_i^T \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} u_i / Y_j \right\}$$

$$j \in [i, i+N]$$

2 - Optimaliseur

Le problème satisfaisant les conditions d'application du principe de séparation (processus linéaire, critère quadratique, bruits indépendants gaussiens), l'optimaliseur sera calculé à partir des équations déterministes :

$$\begin{cases} X_{t+1} = P X_t + Q u_t + \chi \\ Y_t = H X_t + \mu_t \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_i^{i+N} (Y_i^T Q_1 Y_i + u_i^T R u_i)$$

Conformément aux résultats établis en [1ère partie - chapitre 2 - III]
la commande u sera de la forme :

$$u_t = S X_t + G$$

Soit :

$$\begin{aligned} u_{1t} &= -0.209 p_b t - 0.102 t_s t + 0.189 \cdot 10^{-1} x_3 t - 0.476 \cdot 10^{-1} q_c t \\ &\quad + 0.41 \cdot 10^{-2} q_d t + 0.309 \cdot 10^{-2} \delta q_s t - 0.129 x_7 t - 3.72 \\ u_{2t} &= -0.633 p_b t + 0.264 \cdot 10^{-1} t_s t - 0.915 \cdot 10^{-2} x_3 t + 0.312 \cdot 10^{-2} q_c t \\ &\quad - 0.159 \times 10^{-1} q_d t + 0.205 \times 10^{-2} \delta q_s t + 0.564 \times 10^{-1} x_7 t + 0.937 \end{aligned}$$

3 - Reconstructeur

Le reconstructeur choisi a été un filtre de KALMAN [2ème partie - chapitre 2]. Le temps de calcul estimateur - optimisateur étant petit devant la période d'échantillonnage (10 s), nous avons choisi les équations données sous la forme "estimateur" [cf. 2ème partie - chapitre 2], c'est-à-dire :

$$\hat{X}_{t+1} = P \hat{X}_t + Q u_t + \chi + \hat{L} [Y_{t+1} - H(P \hat{X}_t + Q u_t + \chi) - \mu_t]$$

Les grandeurs q_c et q_d étant parfaitement mesurées, l'estimation concernera p_b , t_s , x_3 , δq_s , x_7 .

La matrice $\hat{L}$ du gain du filtre a été calculée grâce au programme mis au point en [2ème partie - chapitre 2]. Toutefois, les coefficients L_{11} et L_{41} ont dû être ajustés expérimentalement.

La valeur adoptée pour L est :

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 0.69 & 0 \\ 0 & 1.2 \\ 0 & -0.87 \\ -0.39 \times 10^3 & 0.81 \times 10^{-2} \\ 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$

En posant :

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.337 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0.935 & -0.584 \cdot 10^{-1} & -0.516 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0.819 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} 0.41 \cdot 10^{-2} & 0.337 \cdot 10^{-3} \\ 0.967 \cdot 10^{-1} & 0.336 \cdot 10^{-2} \\ 0 & 0.109 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mu' = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x' = \begin{bmatrix} -0.337 \\ -7.4 \\ -4.35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.16 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_t = \begin{bmatrix} p_{b \ t} \\ t_{s \ t} \\ x_{3 \ t} \\ \delta q_{s \ t} \\ x_{7 \ t} \end{bmatrix} ; \quad y_t = \begin{bmatrix} y_{1 \ t} \\ y_{2 \ t} \end{bmatrix} ; \quad F_t = \begin{bmatrix} q_{c \ t} \\ q_{d \ t} \end{bmatrix}$$

Les équations de l'estimateur deviennent :

$$\hat{X}_{t+1} = P' \hat{X}_t + Q' F_t + x'_1 + \hat{L} [y_{t+1} - H'(P' \hat{X}_t + Q' F_t + R'_1) - \mu']$$

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 0.69 & 0 \\ 0 & 1.2 \\ 0 & -0.87 \\ -0.39 \cdot 10^3 & 0.81 \cdot 10^{-2} \\ 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$

4 - Réalisation pratique (simulation)

a - Le modèle mathématique du processus est câblé sur calculateur analogique, conformément aux équations calibrées suivantes [problème accéléré 5 fois] :

$$\begin{aligned} \dot{p}_b &= 0.0820 \cdot q_c - 0.0674 \cdot \delta q_s + 0.00674 \cdot q_d - 0.0337 \\ \dot{t}_s &= 0.0333 [-t_s - x_3 - 1.6 \cdot \delta q_s + 3 \cdot q_c - 1.17] \\ \dot{x}_3 &= 0.1 [-x_3 + 1.2 \cdot q_c - 0.24] \\ \dot{q}_c &= 0.25 \cdot u_1 \\ \dot{q}_d &= 0.25 \cdot u_2 \\ \delta \dot{q}_s &= 0 \\ \dot{x}_7 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Y_1 = P_b - 0.64 \delta Q_s - 0.16 \\ Y_2 = T_s + X_7 \\ Y_3 = Q_c \\ Y_4 = Q_d \end{cases}$$

b - Ces 4 mesures Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sont prélevées par le calculateur numérique, l'ordre de prélèvement étant donné périodiquement par l'unité logique [toutes les deux secondes en temps accéléré]. Le calculateur numérique estime alors le vecteur d'état et élabore la commande grâce au programme "LOR ESTIMATEUR - OPTIMALISEUR". Cette commande est transmise au calculateur analogique, en conservant la même valeur jusqu'à l'échantillonnage suivant [bloqueur d'ordre zéro]. Le schéma de cette réalisation se trouve en Annexe 2.

5 - Résultats expérimentaux

a - La figure 8 représente les courbes de référence. Le modèle câblé sur calculateur analogique est celui à partir duquel l'estimateur et l'optimaliseur ont été calculés.

b - La figure 9 est réalisée avec le même modèle qu'en "a", mais en laissant dériver x_7 [bruit de WIENER]. Une dérive de 5°C n'influence pratiquement pas la température.

c - La dérive x_7 étant de nouveau nulle, on fait varier certains coefficients du modèle câblé sur calculateur analogique :

* La figure 10 représente une variation de 10 % du coefficient de δq_s dans l'équation de température. Les dynamiques restent sensiblement inchangées. Il faut noter l'augmentation sensible du temps mis par p_s et t_s pour rejoindre parfaitement leur consigne.

* La figure 11-a représente une variation de 50 % du coefficient de δq_s dans l'équation de mesure y_1 .

* La figure 11-b représente une variation de 10 % de tous les coefficients. Là aussi le temps de retour de p_s et t_s à leur consigne augmente.

En règle générale, plus les coefficients du modèle sont faussés, plus les dynamiques se dégradent.

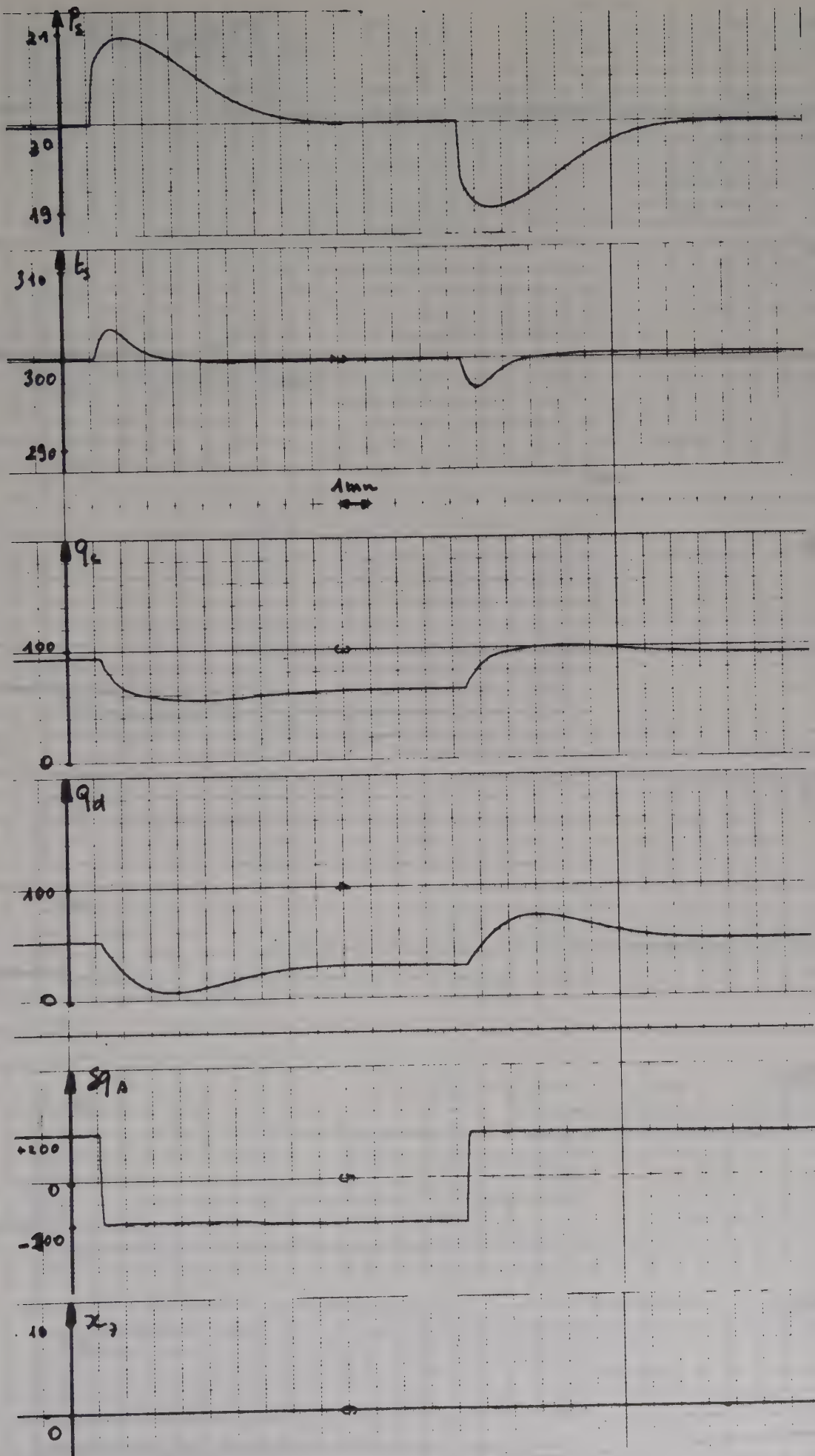


Fig. 8

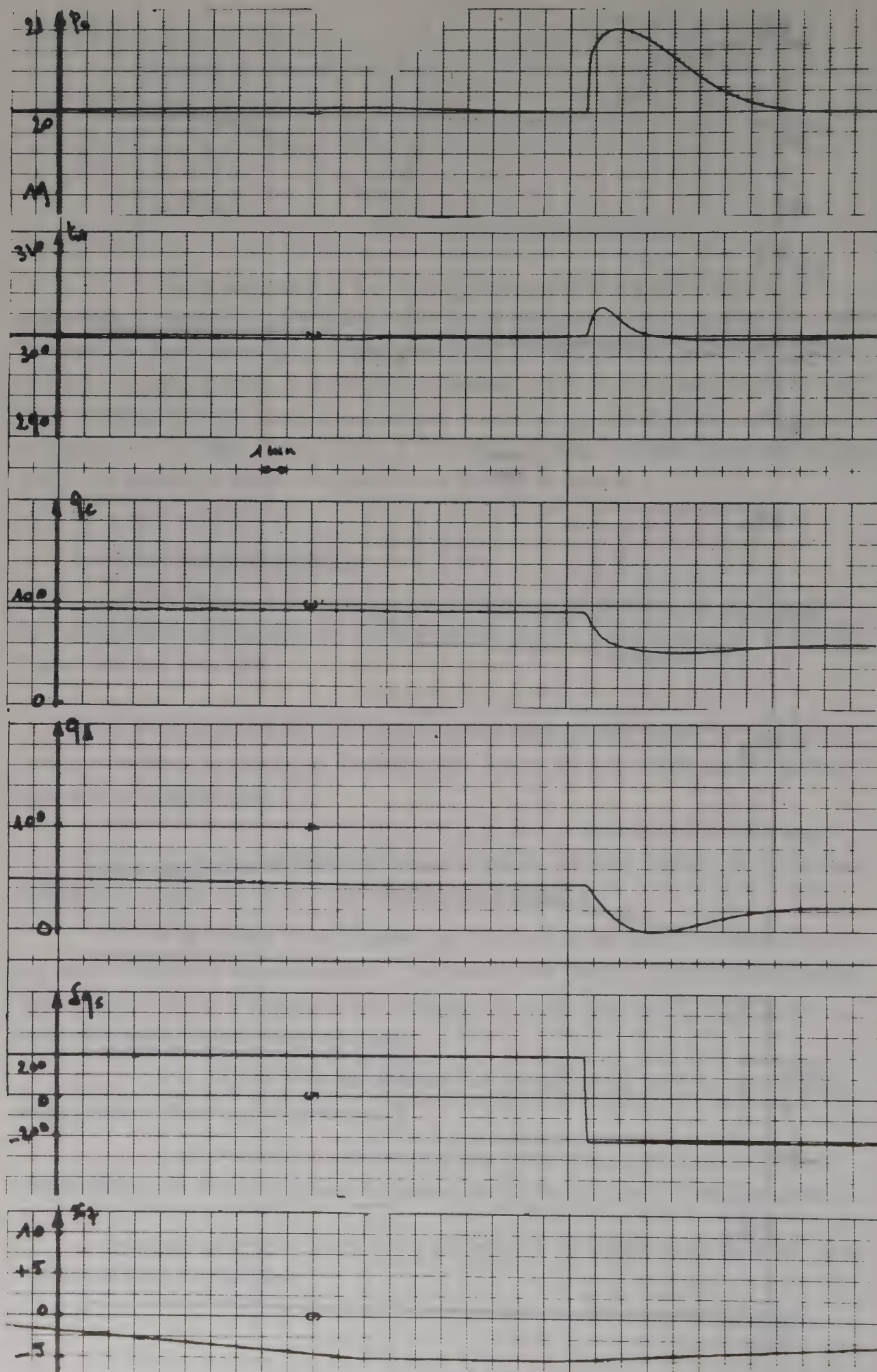


Fig. 9

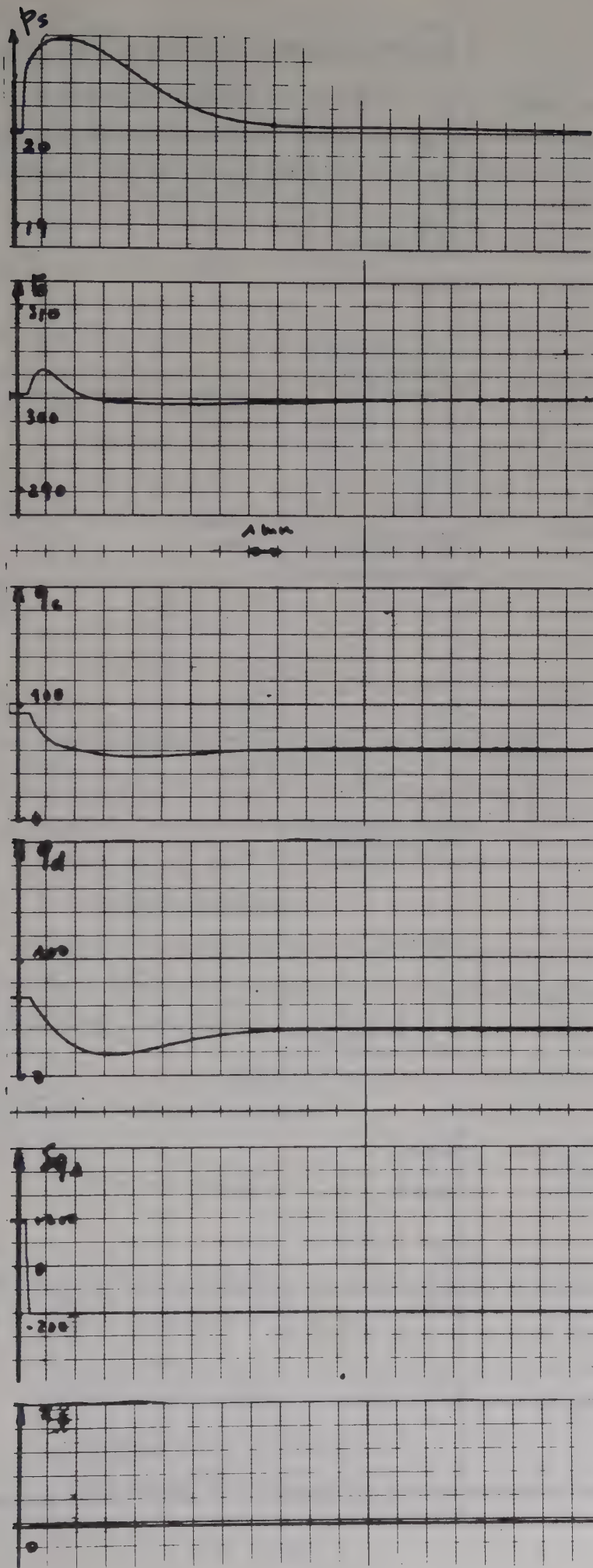


Fig. 10

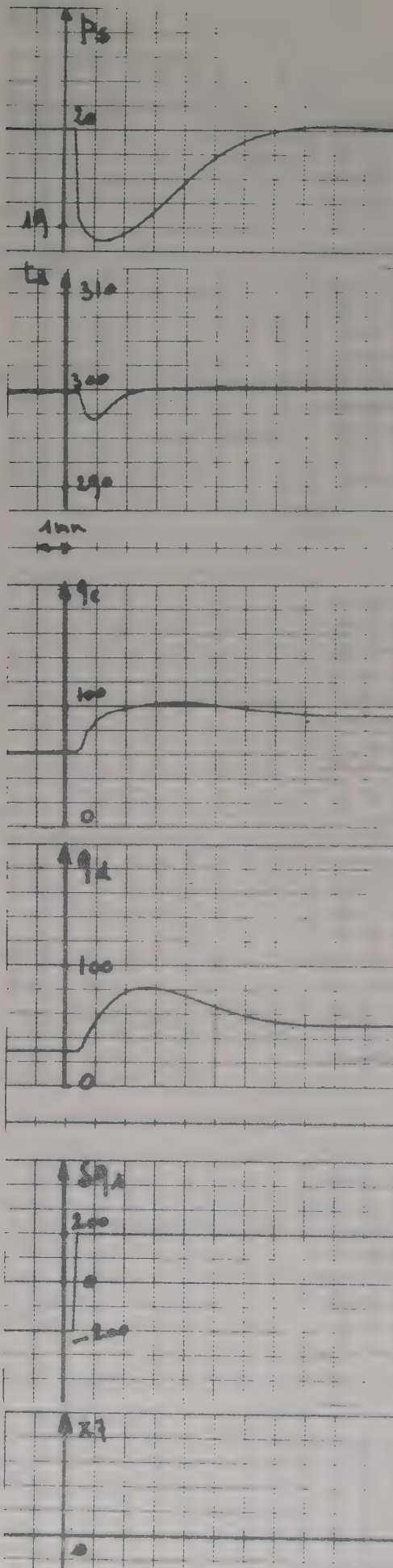


Fig. 11-a

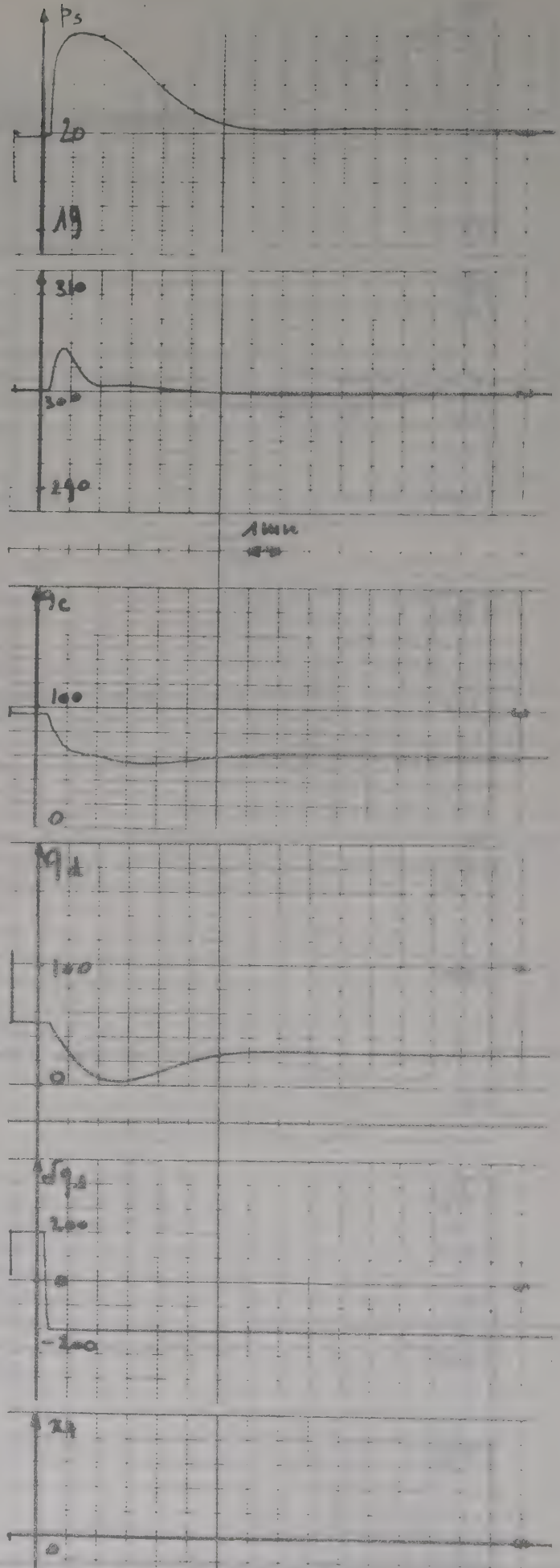
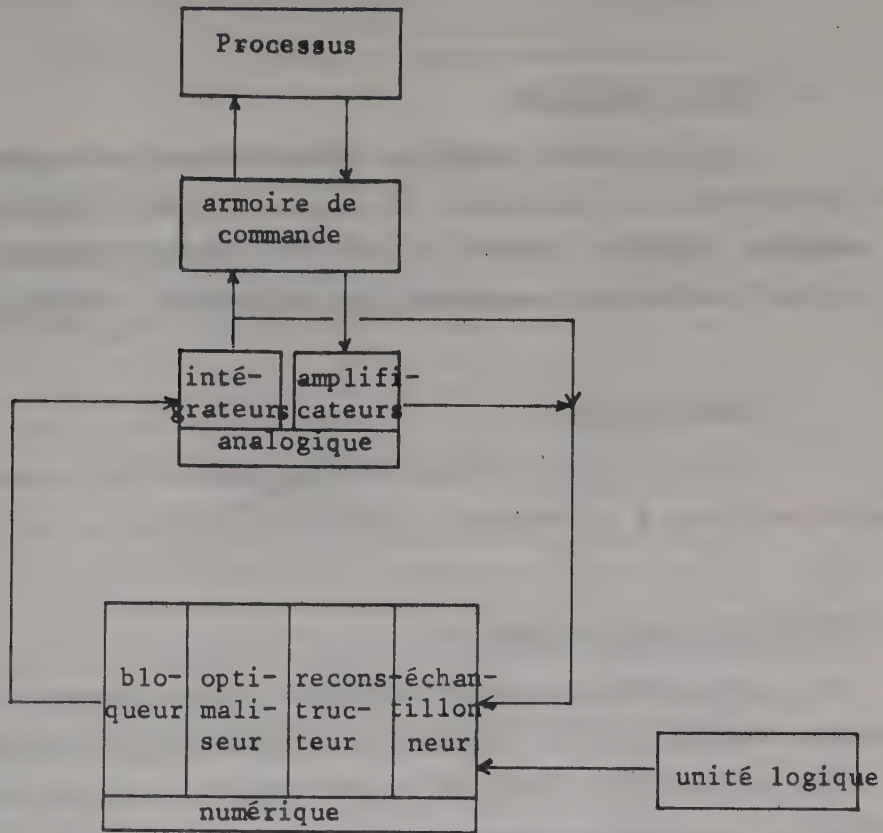


Fig. 11-b

B - ESSAIS SUR PROCESSUS - MODELE A 7 ETATS -

1 - Le principe général de cet essai est le même que celui effectué en simulation. Nous allons toutefois préciser le rôle de chacune des unités numérique, analogique et logique (Le schéma de câblage général se trouve en annexe 4).



a - Unité analogique

α - Certaines opérations, qui auraient dû être effectuées par l'armoire de commande, sont encore effectuées par le calculateur analogique (multiplications, extraction de racines) [cf annexe 3].

Cette partie du calculateur analogique est appelée "amplificateurs" sur le schéma ci-dessus.

β - Les équations

$$\begin{cases} \dot{q}_c = u_1 \\ \dot{q}_d = u_2 \end{cases}$$

sont câblées sur le calculateur analogique dans la partie appelée "intégrateurs" dans le schéma ci-dessus.

En fin de compte le calculateur analogique a pour :

Entrées :

Provenant du processus : les informations des capteurs

Provenant du calculateur numérique par le canal des DAM : u_1 et u_2

Sorties :

Vers le processus : q_c, q_d

Vers le calculateur numérique par le canal des ADC : y_1, y_2, y_3, y_4

b - Unité numérique

Le calculateur numérique échantillonne les informations continues qui lui parviennent. Il reconstruit le vecteur d'état et élabore la commande. Cette commande, constante pendant la période d'échantillonnage, est transmise au calculateur analogique [programme "LOR ESTIMATEUR - OPTIMALISEUR"].

c - Unité logique

L'unité logique ordonne périodiquement (10 s) au calculateur numérique de se livrer à la séquence d'opérations décrite en b.

2 - Résultats expérimentaux

Le modèle mathématique ne représente pas exactement le processus. En conséquence, comme cela a été constaté en simulation, les dynamiques se dégradent ; si la majorité des effets de la perturbation est corrigée en 7 mm pour la pression et 2 mm pour la température, il faut 15 mm supplémentaires pour que la température et la pression de sortie rejoignent leur consigne.

Il faut toutefois noter que la précision obtenue est satisfaisante : pendant un fonctionnement de deux heures en régime permanent, nous avons constaté des variations de température de $\pm 0.3^\circ\text{C}$ et de pression de ± 0.05 bar.

Les figures ci-jointes représentent les grandeurs à réguler t_s et p_s pour des variations du débit de vapeur q_s (perturbation) de 20 % (figure 12) et de 40 % (figure 13). Les débits de combustibles (q_c) et d'eau de désurchauffe (q_d) sont également représentés.

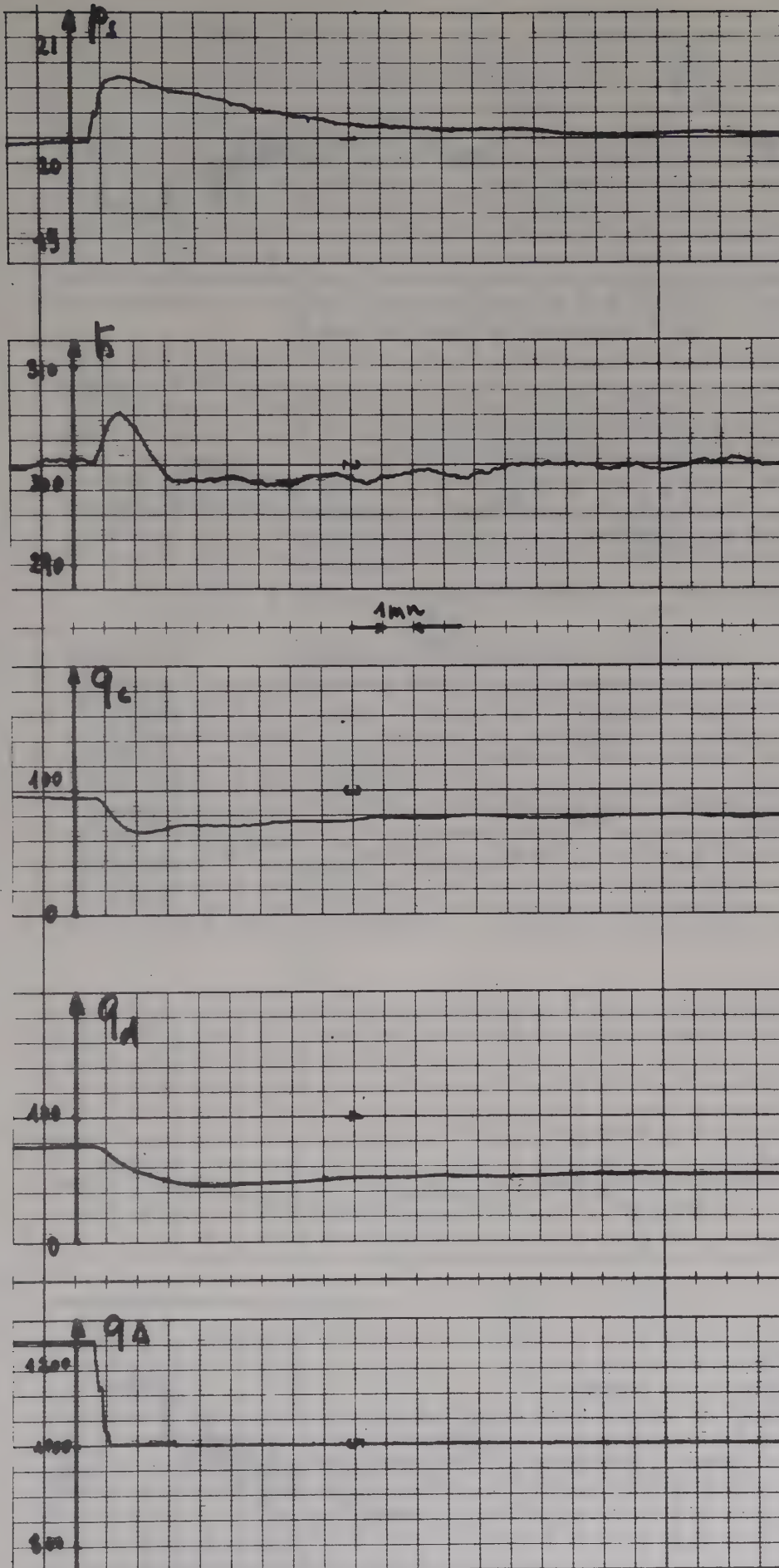


Fig. 12

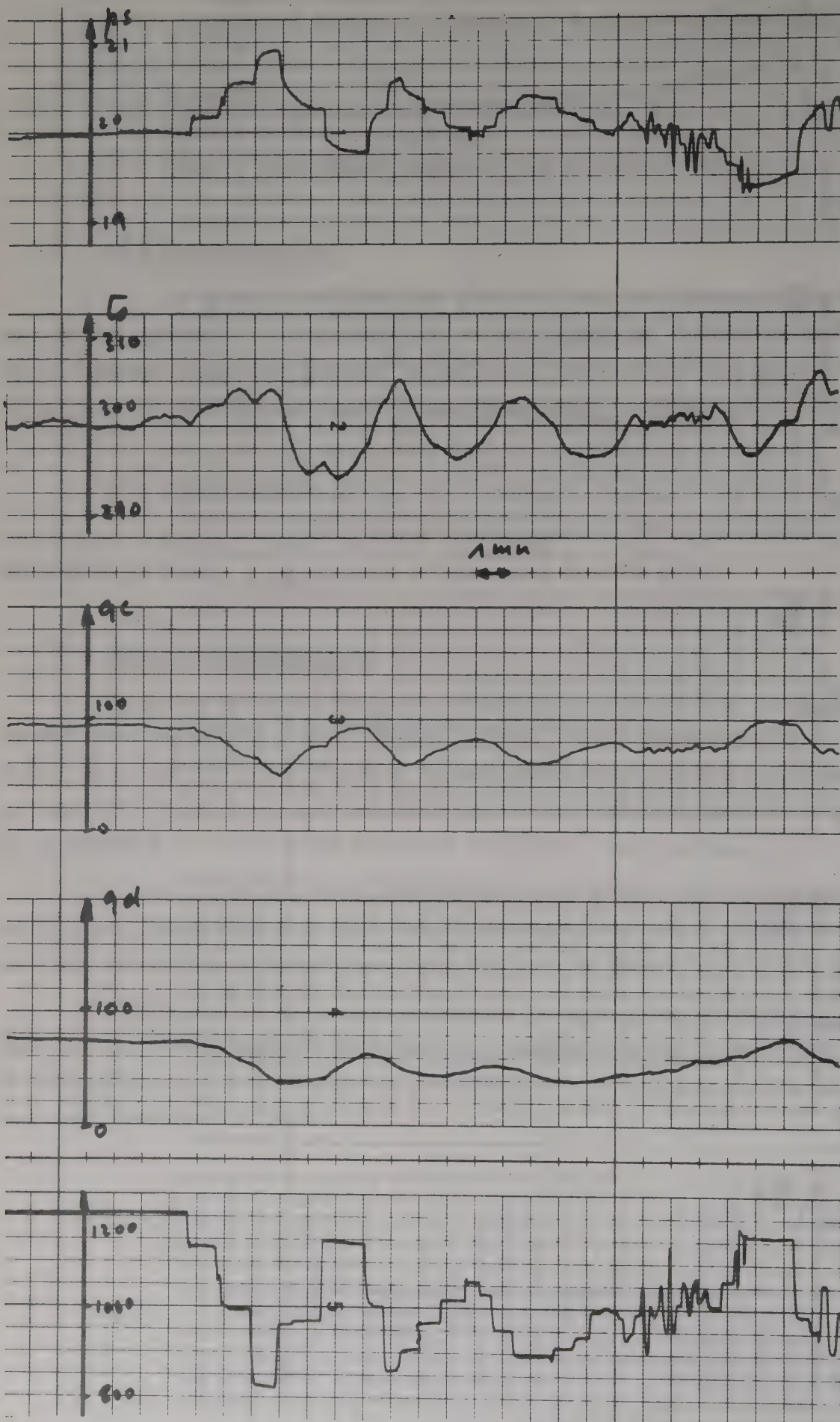


Fig. 13

BIBLIOGRAPHIE

- [B.1] - Ph. De LARMINAT - "Sur l'identification par filtrage non linéaire"
Thèse Doctorat-ès-Sciences - Mai 1971
- [B.2] - Y. THOMAS - "Contribution à l'étude et à la mise en oeuvre
d'une régulation optimale dynamique fonctionnelle"
Thèse Doctorat-ès-Sciences - Avril 1971
- [B.3] - M. AZEMA - "Commande sous-optimale par algorithmes d'appren-
tissage. Application à la commande en ligne d'une
chaudière"
Thèse de Docteur-Ingénieur - Septembre 1970
- [B.4] - A. ABDALLAH - "Régulation quadratique optimale"
Y. THOMAS Journées AFCET - Juin 1971
- [B.5] - Y. THOMAS - "Emploi d'un modèle d'état en vue d'une régulation
A. ABDALLAH multivariable"
Journées d'étude de Lille - Septembre 1971
- [B.6] - J. DESCUSSE - Rapport interne
A. BEYSSENS Juillet 1970.

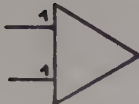
Annexes à la 3ème partie

SCHEMAS

Symboles utilisés



Inverseur



Sommateur (inversion de signe)



Intégrateur



Amplificateur opérationnel. En haut : entrée sur résistance. En bas : entrée sur S.J.



Potentiomètre



Elément non linéaire : multiplieur, extracteur de racine, élévation au carré.



A D C



D A M (multiplication par -1)



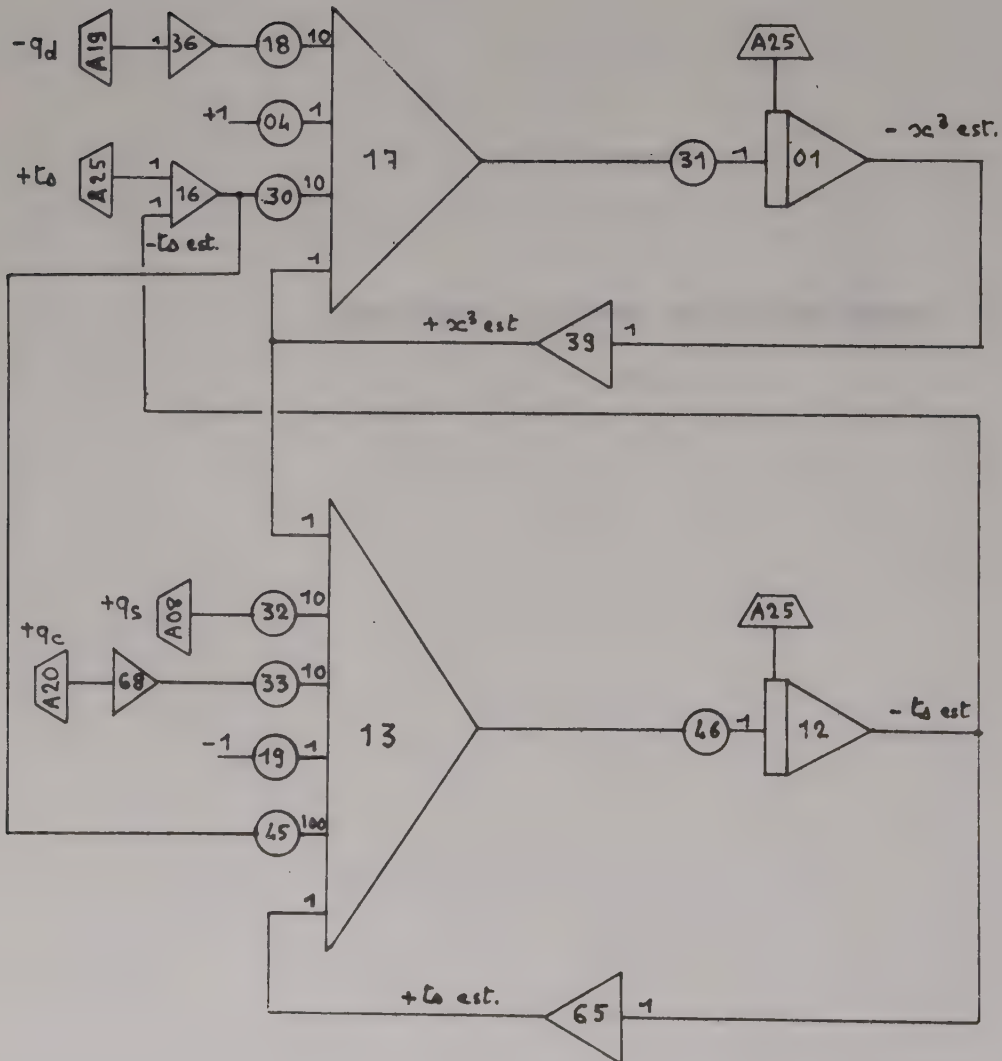
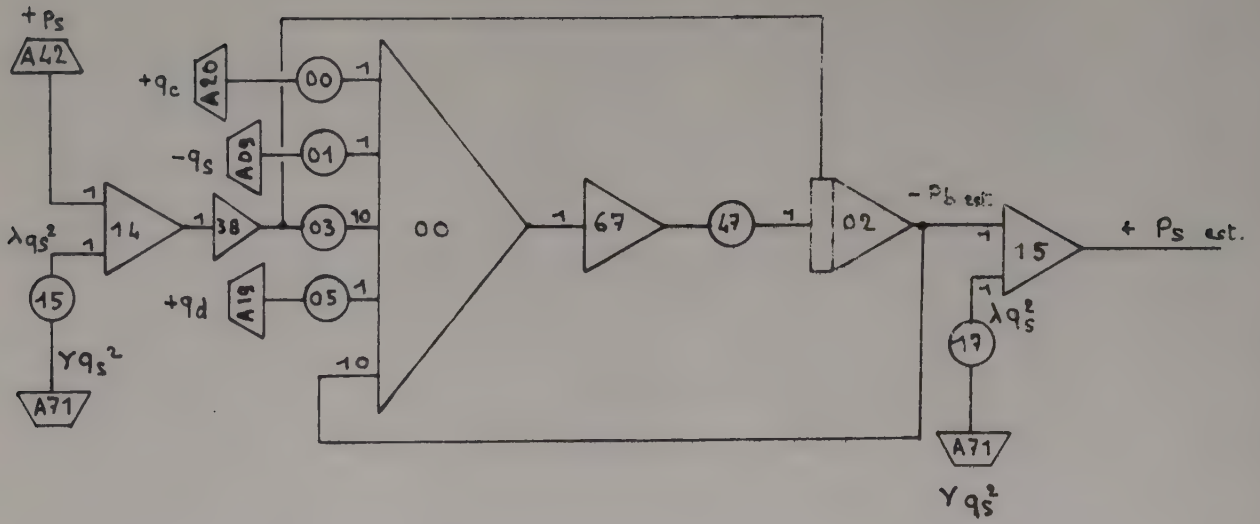
Entrée-sortie chaudière



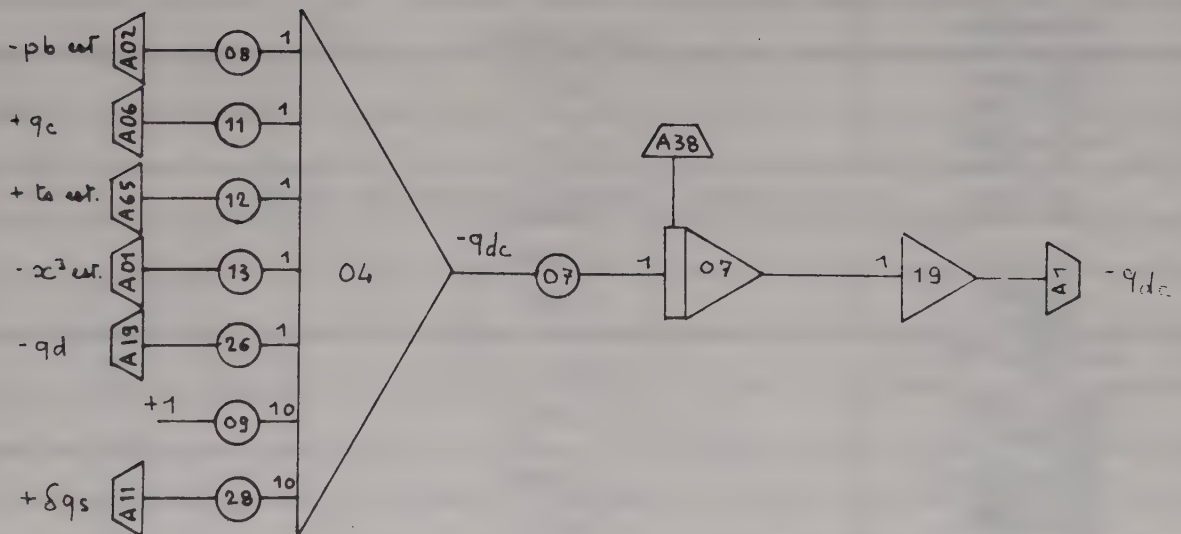
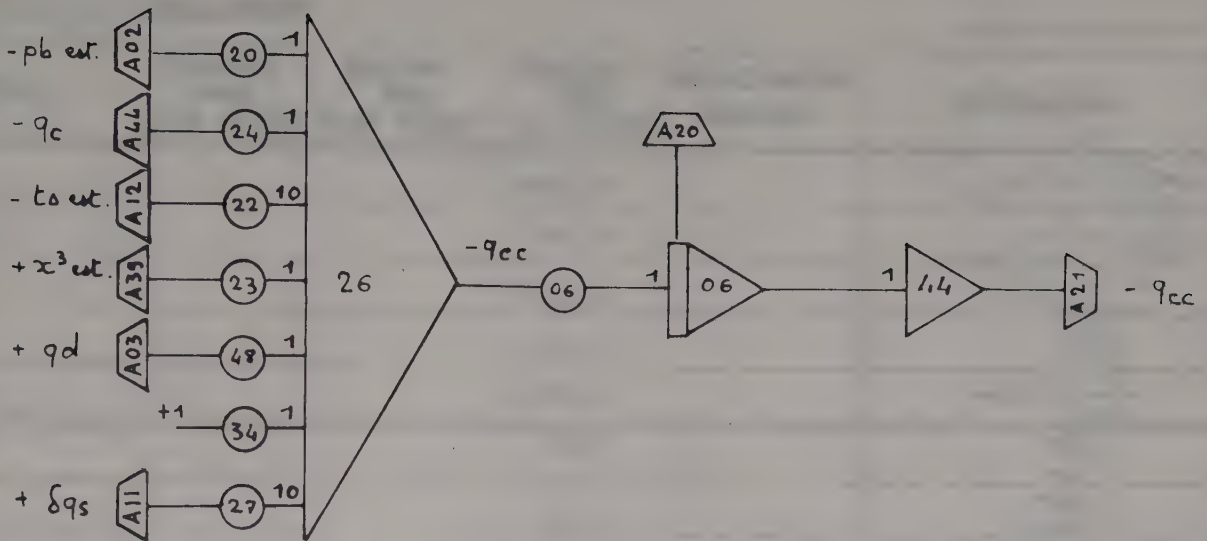
Raccordement de fils situés de part et d'autre d'un schéma touffu. Le n° est un n° d'amplificateur.

Annexe 1

SCHEMA REGULATION CONTINUE (PROCESSUS)



ESTIMATEUR



OPTIMISEUR

AFFECTATION DES POTENTIOMÈTRES (TR - 48)

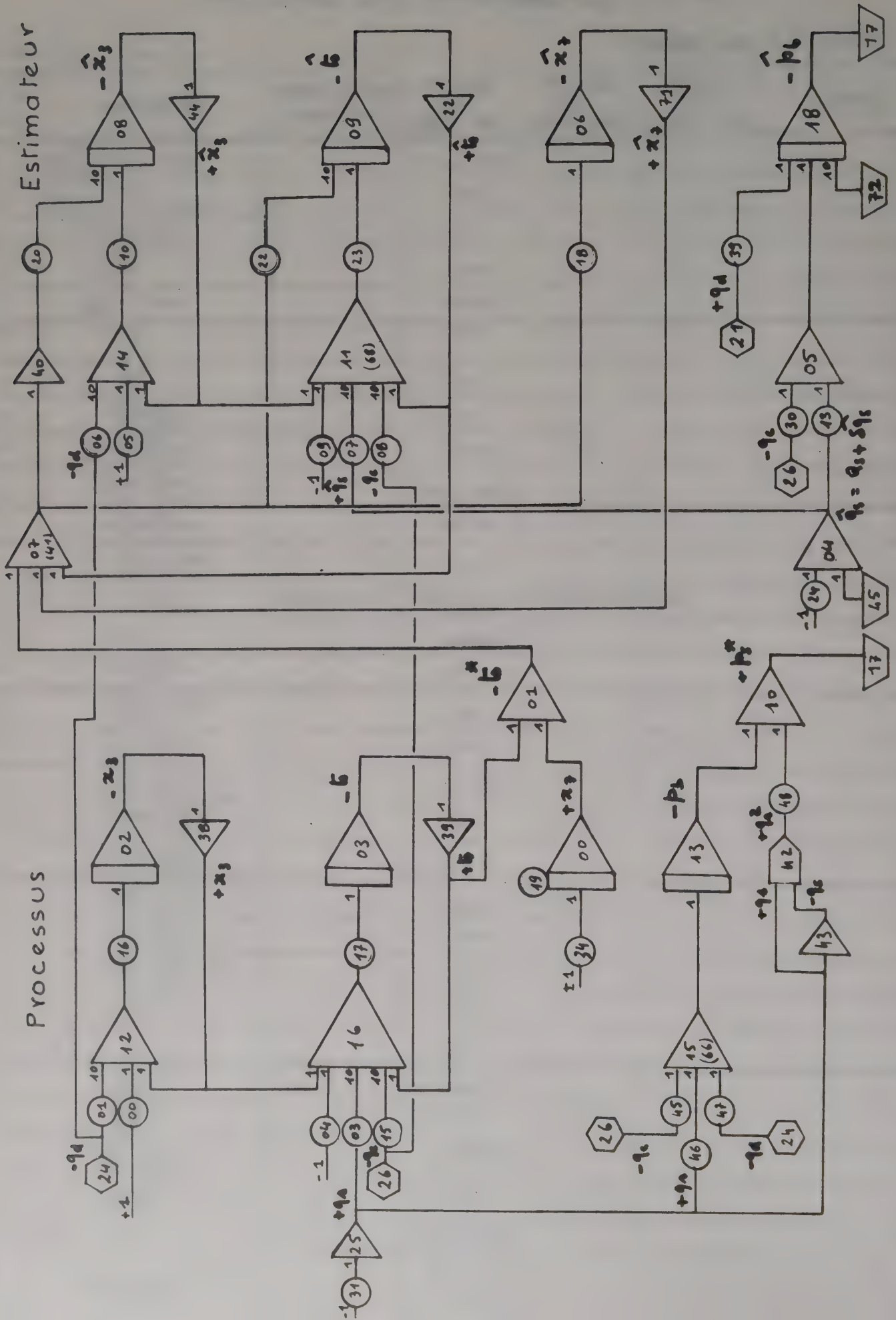
DATE _____

PROBLÈME CH. ANAL.

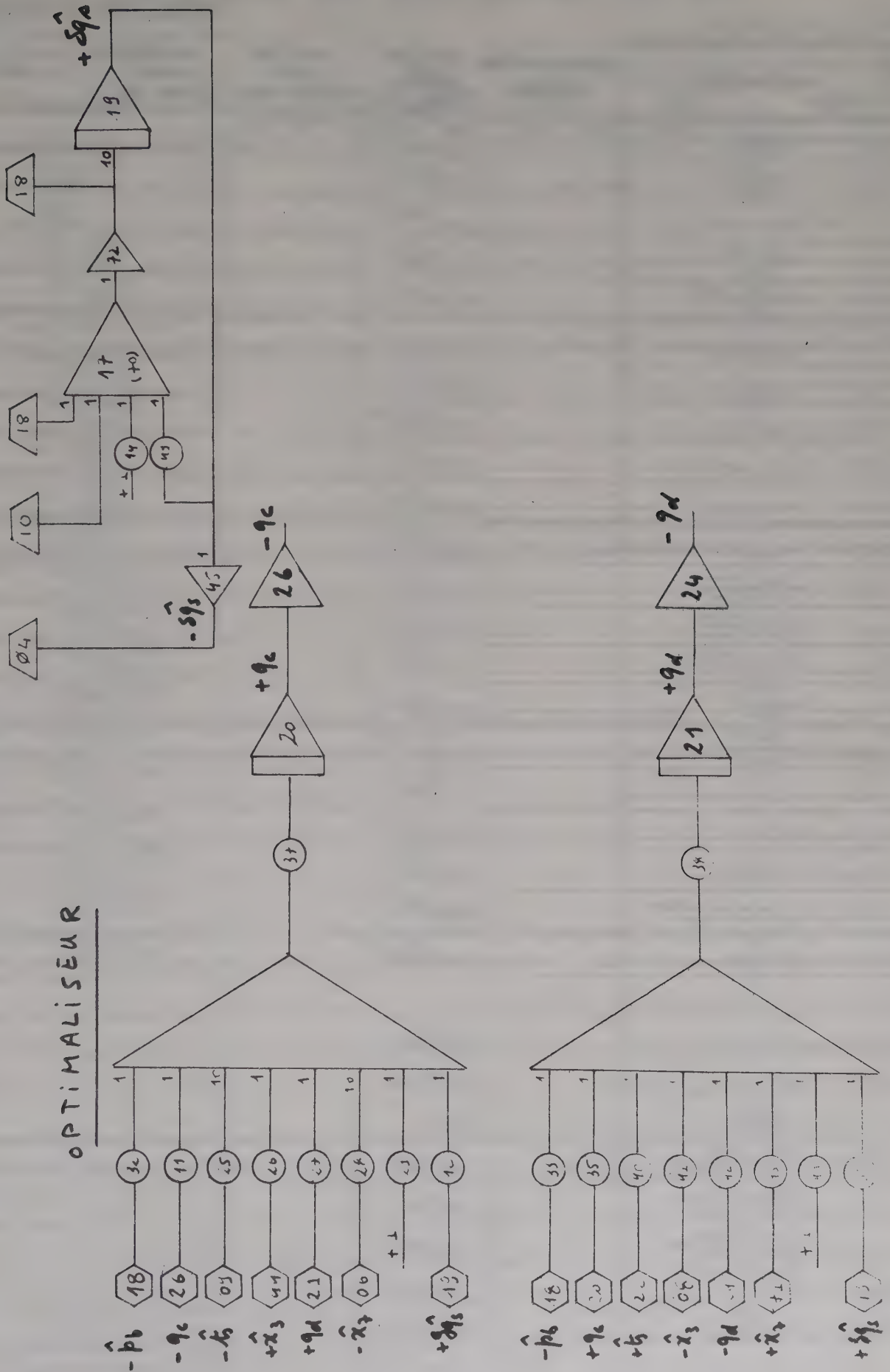
No du POT.	PARAMÈTRE	VÉRIFICATION STATIQUE	VALEUR pour ESSAI No 1	VALEUR pour ESSAI No 2	VALEUR pour ESSAI No 3	NOTES
00	$\frac{5}{p_b m} \times a \times q_c m$		0,0792			
01	$\frac{5}{p_b m} \times b \times q_s m$		0,065			
03	$\frac{5 L_{11}}{0.2}$		0,025			
04	$\frac{40 \times d}{b m}$		0,550			
05	$\frac{5}{p_b m} \times b \times q_d m$		0,0065			
06	$\frac{u_{2m}}{q_{2m}}$		0,05			
07	$\frac{u_{2m}}{q_{2m}}$		0,05			
08	$\frac{K_{51} \times p_{2m}}{s^2 \times u_{2m}}$		+0,33			
09	$\frac{25}{s^2 \times u_{2m}}$		0,0125			
11	$\frac{K_{54} \times q_{2m}}{s^2 \times u_{2m}}$		0,1405			
12	$\frac{K_{52} \times t_{2m}}{s^2 \times u_{2m}}$		0,444			
13	$\frac{K_{53} \times x_{2m}}{s^2 \times u_{2m}}$		0,181			
15	$\frac{2 \ell q_{5m}}{a s \times p_b m}$		0,9636			
17	voir 15		0,9636			
18	$\frac{d \times q_d m}{b m}$		0,275			
19	$\frac{f - 80 g + 1000 h}{b m}$		0,02			
20	$\frac{K_{41} \times p_{2m}}{s^2 \times u_{2m}}$		0,156			
22	$\frac{K_{42} \times t_{2m}}{s^2 \times u_{2m}} \times \frac{1}{10}$		0,1335			
23	$\frac{K_{43} \times x_{2m}}{s^2 \times u_{2m}}$		0,257			
24	$\frac{K_{44} \times q_{2m}}{s^2 \times u_{2m}}$		0,972			
26	$\frac{K_{55} \times q_{2m}}{s^2 \times u_{2m}}$		0,487			
27	$\frac{K_{46} \times q_{5m}}{s^2 \times u_{2m}} \times \frac{1}{10}$		0,0946			
28	$\frac{K_{56} \times q_{5m}}{s^2 \times u_{2m}} \times \frac{1}{10}$		0,0262			
30	$\frac{5 L_{32}}{10 \times c}$		0,26			
31	c		0,012			
32	$\frac{b \times q_{5m}}{t_{5m}}$		0,20			
33	$\frac{g \times q_{2m}}{b m}$		0,25			
34	$\frac{1 \times g_{40}}{s^2 \times u_{2m}}$		0,3960			
45	$\frac{5 L_{32}}{100 \times e}$		0,5			
46	e		0,00650			
47			0,2			
48	$\frac{K_{45} \times q_{2m}}{s^2 \times u_{2m}}$		0,1405			

Annexe 1 bis

SCHEMA REGULATION CONTINUE (SIMULATION)



OPTIMALISEUR



AFFECTATION DES POTENTIOMÈTRES (TR-48)

DATE _____

PROBLÈME Simulation analogique

No du POT.	PARAMÈTRE	VERIFICATION STATIQUE	VALEUR pour ESSAI No 1	VALEUR pour ESSAI No 2	VALEUR pour ESSAI No 3	NOTES
00	P $\frac{h_0 \times d}{t_{2m}}$		0,550			
01	P $\frac{d \times q_{dm}}{t_{2m}}$		0,275			
02						
03	P $\frac{h \times q_{sm}}{t_{2m}}$		0,200			
04	P $\frac{f - 8q - 1000h}{t_{2m}}$		-0,020			
05	E voir 00		0,550			
06	E voir 01		0,275			
07	E voir 03		0,200			
08	E voir 15		0,25			
09	E voir 0.4		-0,02			
10	E voir 16		0,060			
11	O $\frac{K_{44} \times q_{cm}}{s^2 \times U_{1m}}$		0,972			
12	O $\frac{K_{46} \times q_{sm}}{s^2 \times U_{1m}}$		0,9333			
13	E $\frac{5 \times 6 \times q_{sm}}{p_{6m}}$		0,065			
14	E $\frac{p}{p_{6m}}$		+0,245			
15	P $\frac{f \times q_{cm}}{t_{2m}}$		0,25			
16	P 5c		0,060			
17	P 5e		0,0325			
18	E 5L ₅₂		0,200			
19	P I.C. intég. de dérive		+0,02			
20	E 5L ₅₂		0,1489			
21						
22	E 5L ₂₂		0,0210			
23	E 5e		0,0325			
24	E $\frac{2s}{q_{sm}}$		+0,5			
25	O $\frac{K_{42} \times t_{2m}}{s^2 \times U_{1m} \times 10}$		0,1335			
26	O $\frac{K_{43} \times t_{2m}}{s^2 \times U_{1m}}$		0,257			
27	O $\frac{K_{45} \times q_{dm}}{s^2 \times U_{1m}}$		0,1405			
28	O $\frac{K_{47} \times t_{2m}}{s^2 \times U_{1m}}$		0,165			
29	O $\frac{24}{t_{2m} \times U_{2m}}$		+0,3912			

DATE _____

PROBLÈME Sin. ANAL

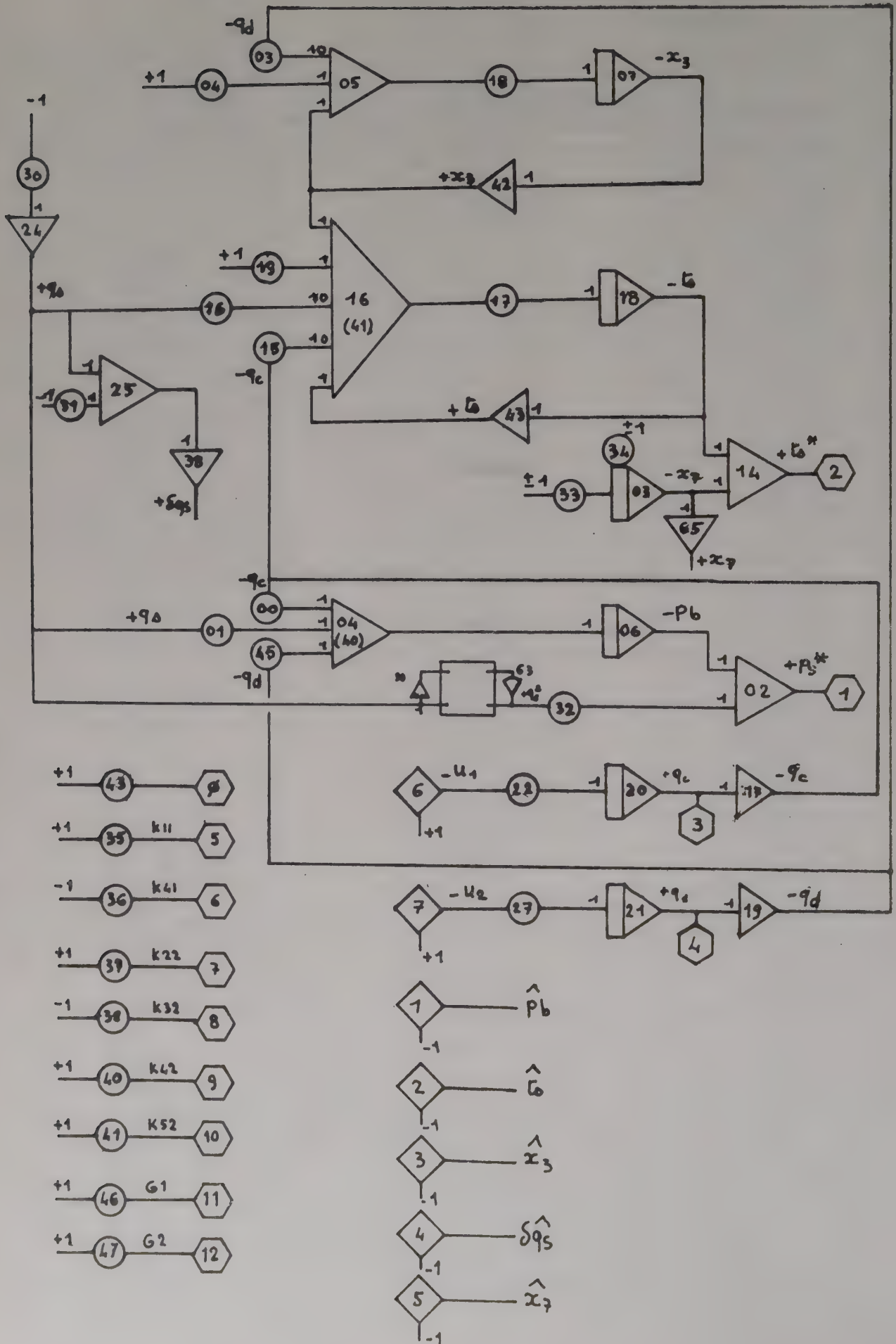
No du POT.		PARAMÈTRE	VÉRIFICATION STATIQUE	VALEUR pour ESSAI No 1	VALEUR pour ESSAI No 2	VALEUR pour ESSAI No 3	NOTES
30	E	$\frac{5 \times a \times q_{cm}}{pb_m}$		0,0792			
31	P	$\frac{Q_5}{q_{sm}}$		0,500			
32	O	$\frac{K_{41} \times pb_m}{g^2 \times U_{gm}}$		0,156			
33	O	$\frac{K_{51} \times pb_m}{g^2 \times U_{zm}}$		0,33			
34	P	integ. derive x _z		e			
35	O	$\frac{K_{54} \times q_{cm}}{g^2 \times U_{zm}}$		0,1405			
36	O	$\frac{K_{56} \times q_{sm}}{g^2 \times U_{zm}}$		+0,2152			
37	O	$5 \frac{U_{sm}}{q_{cm}}$		0,25			
38	O	$5 \frac{U_{zm}}{q_{dm}}$		0,25			
39	E	$5 \frac{B \times q_{dm}}{pb_m}$		0,0065			
40	O	$\frac{K_{52} \times b_m}{g^2 \times U_{zm}}$		0,444			
41	O	$\frac{K_{53} \times z_{sm}}{g^2 \times U_{zm}}$		0,181			
42	O	$\frac{K_{55} \times q_{dm}}{g^2 \times U_{zm}}$		0,487			
43	O	$\frac{K_{57} \times z_{zm}}{g^2 \times U_{zm}}$		0,783			
44	O	$\frac{Q_5}{g^2 \times U_{zm}}$		0,1235			
45	P	$\frac{5 \times a \times q_{cm}}{pb_m}$		0,0792			
46	P	$\frac{5 \times B \times q_{sm}}{pb_m}$		0,0650			
47	P	$\frac{5 \times B \times q_{dm}}{pb_m}$		0,0065			
48	P	$\frac{2l \times q_{sm}}{Q_5 \times pb_m}$		0,98			
49	E	$\frac{2l \times q_{sm}}{Q_5 \times pb_m}$		0,98			

Annexe 2

REGULATION DISCRETE - SIMULATION

ESTIMATEUR - OPTIMALISEUR 640

SIMULATION 7 états



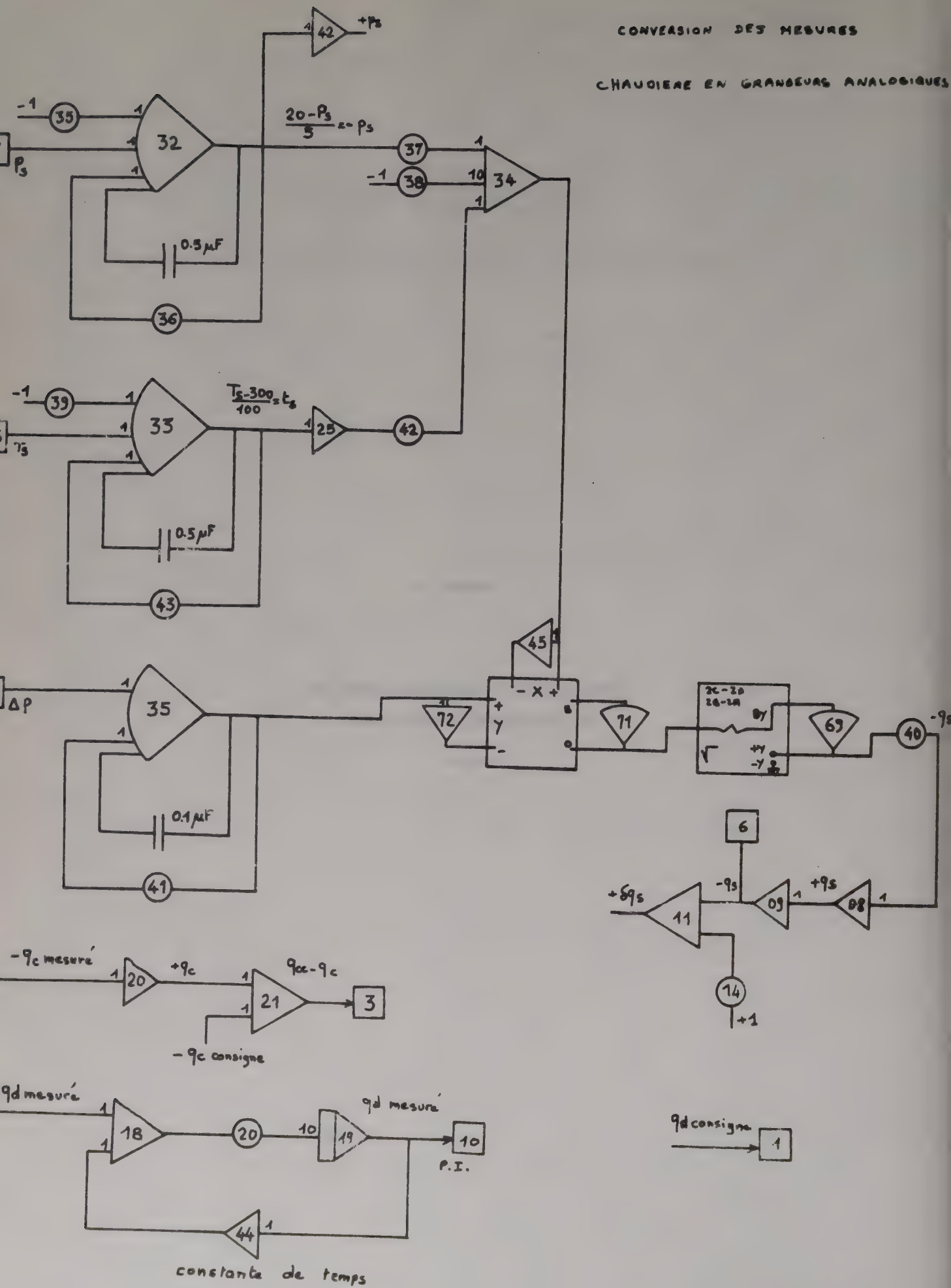
DATE _____

PROBLÈME SIM. NUM.

No du POT	PARAMÈTRE	VERIFICATION STATIQUE	VALEUR pour ESSAI No 1	VALEUR pour ESSAI No 2	VALEUR pour ESSAI No 3	NOTES
00	q_c de p_b		0.0820			
01	q_s de p_b		0.0674			
03	q_d de x_3		0.12			
04	c^t_s de x_3		0.24			
15	$\frac{q_c}{10}$ de t_1		0.3			
16	$\frac{q_s}{10}$ de t_s		0.16			
17	$\frac{1}{T}$ de t_s		0.0333			
18	$\frac{1}{T}$ de x_3		0.1			
19	c^t_s de t_1		+0.37			
22	u_2 de q_s		0.25			
27	u_2 de q_d		0.25			
30	consigne q_s		variable autour de 0.5			
31	$\frac{1000}{q_{sm}}$		0.5			
32	q_s^2 de y_1		0.64			
33	entré intef. de derive		quelques digits			
34	I.c. intef. de derive		± 0.03 ou ± 0.04			
35	K_{11}		0.0680			
36	K_{41}		-0.3950			
37	K_{22}		0.1210			
38	K_{32}		-0.0885			
40	K_{12}		0.0810			
41	K_{52}		0.50			
46	g_1		0.3760			
47	g_2		0.0900			
43	≥ 0.5 contrôle classique < 0.5 séquence normale		0.5			
45	q_d de p_b		0.0067			

Annexe 3

CONVERSION DES MESURES CHAUDIERE
EN GRANDEURS ANALOGIQUES



AFFECTATION DES POTENTIOMETRES TR 48

(Conversion des mesures chaudière en grandeurs analogiques)

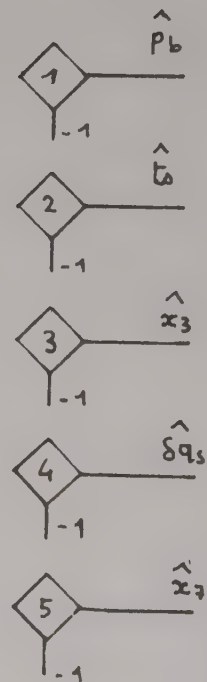
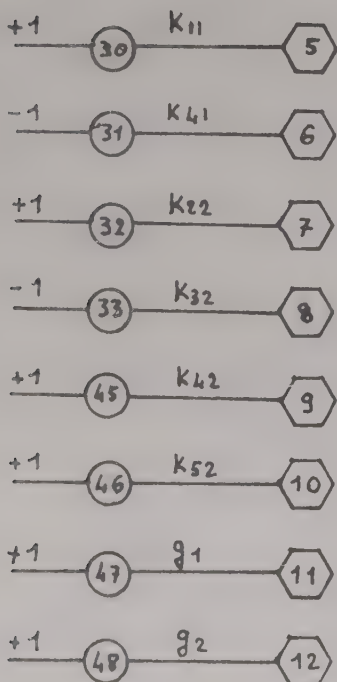
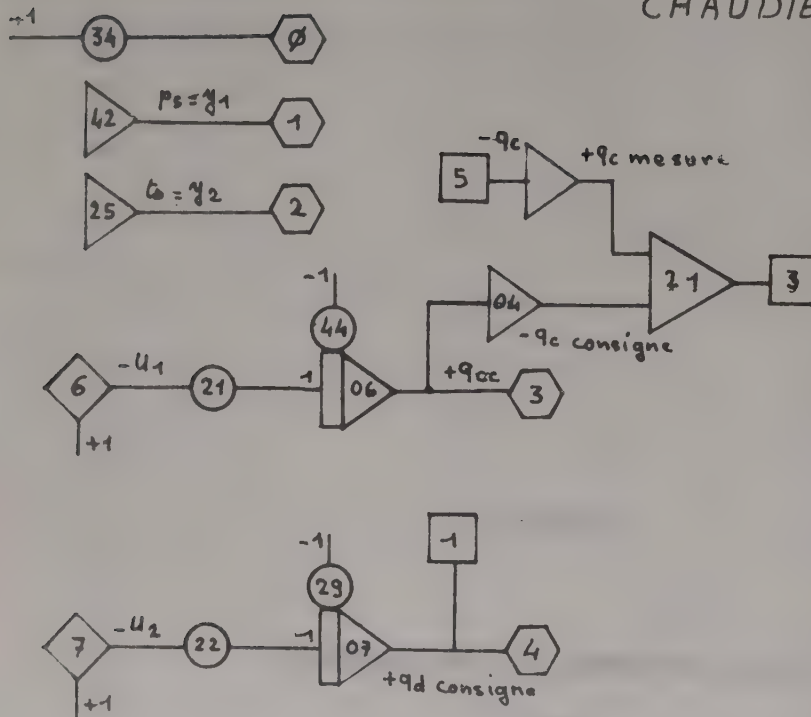
N° du POT.	VALEUR
14	0,5
35	0.5223
36	0.1305
37	0.205
38	0.078
39	0.495
40	0.9905
41	0.7842
42	0.1692
43	0.495
20	0.0957

Annexe 4

REGULATION NUMERIQUE SUR PROCESSUS

ESTIMATEUR - OPTIMALISEUR 640

CHAUDIERE 7 états..



LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE DE L'E.N.S.M.

AFFECTATION DES POTENTIOMÈTRES (TR-48)

DATE _____

PROBLÈME CH. N°44

No du POT	PARAMÈTRE	VÉRIFICATION STATIQUE	VALEUR pour ESSAI No 1	VALEUR pour ESSAI No 2	VALEUR pour ESSAI No 3	NOTES
21	u_1 de q_c		0.050			
22	u_2 de q_d		0.050			
29	I.C. q_d		0.2			
30	K_{11}		0.680			
31	K_{41}		0.3950			
32	K_{22}		0.1210			
33	K_{32}		0.0885			
34	≥ 0.5 contrôle claviers < 0.5 séquence normale		0.5			
45	K_{42}		0.0810			
46	K_{52}		0.4960			
47	g_4		0.3760			
48	g_2		0.0900			
44	I.C. q_d		0.4			

Calibre	Valeur finale dans 640 après A D C et produit calibre
coef.(1) = 10	$K_{11} = 0.6934$
coef.(2) = 1000	$K_{41} = - 0.394 \times 10^3$
coef.(3) = 10	$K_{22} = 0.122 \times 10$
coef.(4) = 10	$K_{32} = - 0.879$
coef.(5) = 0.1	$K_{42} = 0.816 \times 10^{-2}$
coef.(6) = 1	$K_{52} = 0.50$

En boucle ouverte q_c consigne et q_d consigne s'obtiennent grâce à P_{44} et P_{29} en IC.

Pour passer en boucle fermée, il suffit d'appuyer sur OP.

CONCLUSION

Nous avons voulu montrer dans cette étude que l'automaticien, qui doit résoudre les problèmes posés par la régulation d'un processus multivariable, dispose dès maintenant d'une stratégie lui permettant d'arriver à ses fins : l'optimalisation quadratique.

Le choix du modèle d'état et du critère quadratique conduit à une commande dont la structure est voisine des régulations classiques monovariabiles, en ce sens que la commande est constituée par une combinaison linéaire des variables d'état (bouclage) et par un terme d'anticipation.

De plus :

- Si l'on a pris soin de choisir un critère à horizon fuyant [bornes d'intégration t , $t+T$], d'éventuelles informations sur l'évolution future des perturbations sont prises en compte à chaque instant. Par ailleurs, les coefficients des bouclages sont stationnaires.

- Si l'on fait intervenir les dérivées des commandes dans le critère, le statisme en régime permanent est corrigé. D'autre part, en régime transitoire les variations limitées des organes réglants évitent le vieillissement prématuré du processus.

Une fois obtenu le modèle d'état linéaire, la réalisation du système de commande se divise en deux étapes :

- 1° - Calcul hors ligne des paramètres constants de l'optimaliseur et du reconstituteur d'états.

- 2° - Mise en oeuvre en ligne des boucles de commande.

- 1° - Le calcul hors ligne détermine, d'une part, les coefficients de l'optimaliseur, d'autre part, ceux du reconstituteur.

- a - Quel que soit le moyen, analogique ou numérique, choisi pour la réalisation de la régulation, le calcul des coefficients de l'optimaliseur consiste principalement à résoudre numériquement des équations du type RICCATI. Toutefois, si celles-ci sont écrites sous forme d'équations différentielles, il est nécessaire de les présenter sous forme récurrente, afin d'éviter des temps de calcul prohibitifs.

- b - L'élaboration du vecteur de commande nécessite la connaissance de toutes les composantes du vecteur d'état, alors que seules certaines d'entre

elles sont accessibles par la mesure. Le corollaire de l'optimisation quadratique, comme de toutes les méthodes de l'espace d'état, est donc la reconstruction des états. Le but recherché par l'utilisation d'un reconstituteur d'état est de retrouver les grandeurs (états) permettant de prédire l'évolution du processus, les informations disponibles étant constituées par le modèle du processus et les mesures.

Le choix d'un reconstituteur dépendra du processus, de la précision de l'identification, du nombre et de la qualité des mesures, et du matériel dont dispose l'utilisateur.

Les reconstituteurs statiques tels que la pseudo-inverse, qui ne tiennent compte que des informations fournies par les mesures, présentent l'intérêt certain d'une simplicité d'emploi. Par contre, la stabilité du système global ne sera pas toujours garantie, les premières dérivées de la sortie à réguler pouvant, dans certains cas, ne pas figurer dans l'élaboration de la commande.

La supériorité des reconstituteurs dynamiques que nous avons expérimentés est de tenir compte de toutes les informations disponibles sur processus, c'est-à-dire des équations d'état et des équations de mesure. D'autre part, la mise en cascade d'un reconstituteur dynamique et d'un optimiseur stables conduit à un système global stable.

Mais, généralement, la détermination complète de ces reconstituteurs exige la connaissance d'informations supplémentaires telles que les caractéristiques statistiques des bruits dont le processus est entaché (KALMAN) ou bien le temps de réponse du filtre reconstituteur (LUENBERGER).

Nous avons distingué les théories statistiques et les théories déterministes.

* La théorie statistique de KALMAN fournit la structure et les coefficients du reconstituteur, à condition de pouvoir quantifier les caractéristiques statistiques des bruits. La difficulté d'application d'un tel reconstituteur réside dans ce point. Cette quantification peut être réalisée de diverses manières :

- en faisant appel au sens physique de l'utilisateur, qui détermine un ordre de grandeur de ces caractéristiques (les coefficients du reconstituteur ainsi obtenus sont par la suite "ajustés" expérimentalement).

- en utilisant une méthode numérique conduisant à une estimation des bruits.

A ce propos, une méthode, dite "d'estimation des variances", a été mise au point et expérimentée. Elle permet, par filtrage non linéaire reposant lui-même

sur la théorie de KALMAN, de reconstruire à la fois le vecteur d'état et les bruits, ce qui fournit les caractéristiques cherchées. Cette méthode fournit aussi les coefficients du filtre de KALMAN. Toutefois, la non-linéarité des algorithmes nécessite quelques précautions lors de leur initialisation.

* La théorie déterministe de LUENBERGER conduit à un observateur dont la structure (semblable à celle du filtre de KALMAN) est d'autant plus simple que le nombre de mesures indépendantes est élevé. Le calcul des coefficients de ce reconstituteur nécessite, outre la connaissance du modèle d'état et de mesure, la recherche des valeurs propres de la matrice A (équations d'état $\dot{x} = A x + D u$). La démarche que nous avons utilisée pour déterminer l'observateur consiste à se donner les matrices B et Q de l'observateur ($\dot{z} = B z + Q y$), puis à déterminer la matrice T telle que $z = T x$, grâce à la résolution du système $T A - B T = Q H$.

Le choix des matrices B et Q est guidé par des considérations de commandabilité, de stabilité et de temps de réponse.

L'intérêt présenté par cet "observateur" réside dans la diminution du nombre d'équations dynamiques du reconstituteur, par la prise en compte de la forme algébrique des équations de mesures.

Toutefois, cette simplicité est la cause de la limitation de l'application de cette méthode aux processus ayant de faibles bruits de sorties, les mesures étant intégralement transmises à l'organe élaborant la commande.

2° - La mise en ligne des boucles de commande peut faire appel à deux types de technologies : analogique ou numérique.

* Les régulations analogiques ont été historiquement liées à l'application des théories des régulations classiques. De ce fait, leur usage est d'autant plus répandu que l'ingénieur a exercé son sens physique sur ce type de régulations, et qu'il s'est créé ainsi une habitude de réguler un processus continu par un système continu.

A ce point de vue, les théories de l'optimisation quadratique et de la reconstruction représentent un moyen scientifique de trouver les coefficients des régulations classiques analogiques.

Il faut toutefois tenir compte de deux facteurs limitatifs de ce type de technologie :

- Le coût des intégrateurs fait accorder une grande importance à la dimension de l'état et contraint à l'utilisation de modèles simplifiés.

- L'amélioration et les modifications d'une structure des boucles de commande entraînent des difficultés liées au caractère non centralisé des

systemes de commande analogiques.

* Les avantages offerts par les régulations numériques sont de deux ordres :

- La réduction de la dimension de l'état représente un problème moins fondamental du fait que le calculateur numérique est particulièrement adapté aux théories vectorielles.

- Le calculateur numérique affecté à la régulation peut aussi être utilisé à d'autres fins.

Sans prétendre avoir fait le tour complet de la question, nous espérons d'une part, avoir clarifié quelques idées, d'autre part, avoir fourni les éléments permettant le passage d'une théorie désormais classique à la pratique.

Dans ce but, nous avons donné une large part à l'expérimentation des diverses méthodes exposées, et l'application de la régulation quadratique optimale a été réalisée sur unité pilote, aussi bien par voie analogique que numérique, conduisant à des résultats satisfaisants.

Les travaux exposés dans ce rapport ne représentent qu'une contribution à une tâche collective, dont les objectifs sont de deux ordres :

- d'ordre théorique, devant aboutir à la mise au point d'un programme unique pour lequel la connaissance des équations du processus à réguler, ainsi que des performances désirées, permettra de définir la structure et les paramètres du régulateur (optimaliseur - restructeur) à mettre en oeuvre.

- d'ordre expérimental, constituant l'aboutissement normal des recherches effectuées en simulation et sur processus pilote, c'est-à-dire l'application sur une centrale thermique réelle.

Posons :

$$e^{L(t_2-t_1)} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_2, t_1) & \phi_{12}(t_2, t_1) \\ \phi_{21}(t_2, t_1) & \phi_{22}(t_2, t_1) \end{bmatrix}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{L(t_2-\tau)} \begin{bmatrix} R_1 \\ H^T Q z(\tau) \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} H_1(t_1, t_2) \\ H_2(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

La relation (6) est vraie $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$

et en particulier pour $t_2 = T = \text{temps final}$
 $t_1 = t = \text{temps courant}$

(6) devient :

$$(7) \quad \begin{bmatrix} x(T) \\ p(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(T, t) & \phi_{12}(T, t) \\ \phi_{21}(T, t) & \phi_{22}(T, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1(T, t) \\ H_2(T, t) \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \phi_{11}(T, T) = \phi_{22}(T, T) = 1$$

$$\phi_{12}(T, T) = \phi_{21}(T, T) = 0$$

$$H_1(T, T) = H_2(T, T) = 0$$

en tenant compte des conditions finales sur $p(T)$, (7) s'écrit :

$$(8) \quad \begin{cases} (8') \\ x(T) = \phi_{11}(T, t) x(t) + \phi_{12}(T, t) p(t) + H_1(T, t) \\ (8'') \\ p(T) = \phi_{21}(T, t) x(t) + \phi_{22}(T, t) p(t) + H_2(T, t) \end{cases} \quad (8''') \quad = H^T F H x(T) - H^T F z(T)$$

Reportons dans $8'''$ $x(T)$ donné par $8'$:

$$\phi_{21}(T, t) x(t) + \phi_{22}(T, t) p(t) + H_2(T, t) =$$

$$H^T F H [\phi_{11}(T, t) x(t) + \phi_{12}(T, t) p(t) + H_1(T, t)] - H^T F z(t)$$

$$(\phi_{22} - H^T F H \phi_{12}) p(t) = (H^T F H \phi_{11} - \phi_{21}) x(t) + H^T F H H_1 - H^T F z(T) - H_2$$

$$p(t) = [\phi_{22}(T, t) - H^T F H \phi_{12}(T, t)]^{-1} [H^T F H \phi_{11}(T, t) - \phi_{21}(T, t)] x(t)$$

$$- [\phi_{22}(T, t) - H^T F H \phi_{12}(T, t)]^{-1} [-H^T F H H_1(T, t) + H^T F z(T) + H_2(T, t)]$$

$p(t)$ est donc une fonction linéaire de $x(t)$ de la forme :

$$(9) \quad \left| \begin{array}{l} p(t) = K(t) x(t) - g(t) \quad \text{pour } \forall t \in [0, T] \\ \text{avec } K(T) = H^T F H \\ g(T) = H^T F z(T) \end{array} \right.$$

donc $u(t) = -R^{-1} D^T [K(t) x(t) - g(t)]$

3 - Relations de récurrence

Grâce à (6) et (9), en prenant des notations analogues à (8), nous pouvons écrire :

$$(10) \quad \left| \begin{array}{l} (10') \\ x(t_2) = \phi_{11}(t_2, t_1) x(t_1) + \phi_{12}(t_2, t_1) p(t_1) + H_1(t_2, t_1) \\ (10'') \\ p(t_2) = \phi_{21}(t_2, t_1) x(t_1) + \phi_{22}(t_2, t_1) p(t_1) + H_2(t_2, t_1) \\ (10''') \end{array} \right. = K(t_2) x(t_2) - g(t_2)$$

Remplaçons 10' par son expression dans 10''' :

$$\begin{aligned} \phi_{21}(t_2, t_1) x(t_1) + \phi_{22}(t_2, t_1) p(t_1) + H_2(t_2, t_1) &= \\ K(t_2) [\phi_{11}(t_2, t_1) x(t_1) + \phi_{12}(t_2, t_1) p(t_1) + H_1(t_2, t_1)] - g(t_2) \\ [\phi_{22}(t_2, t_1) - K(t_2) \phi_{12}(t_2, t_1)] p(t_1) &= [K(t_2) \phi_{11}(t_2, t_1) - \phi_{21}(t_2, t_1)] x(t_1) \\ &\quad - H_2(t_2, t_1) + K(t_2) H_1(t_2, t_1) - g(t_2) \\ p(t_1) &= [\phi_{22}(t_2, t_1) - K(t_2) \phi_{12}(t_2, t_1)]^{-1} [K(t_2) \phi_{11}(t_2, t_1) - \phi_{21}(t_2, t_1)] x(t_1) \\ &\quad - [\phi_{22}(t_2, t_1) - K(t_2) \phi_{12}(t_2, t_1)]^{-1} [-K(t_2) H_1(t_2, t_1) + H_2(t_2, t_1) + g(t_2)] \\ &= K(t_1) x(t_1) - g(t_1) \end{aligned}$$

Soit :

$$\left| \begin{array}{l} K(t_1) = [\phi_{22}(t_2, t_1) - K(t_2) \phi_{12}(t_2, t_1)]^{-1} [K(t_2) \phi_{11}(t_2, t_1) - \phi_{21}(t_2, t_1)] \\ g(t_1) = [\phi_{22}(t_2, t_1) - K(t_2) \phi_{12}(t_2, t_1)]^{-1} [-K(t_2) H_1(t_2, t_1) + H_2(t_2, t_1) + g(t_2)] \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} K(T) = H^T F H \\ g(T) = H^T F z(T) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} K = \text{matrice } n \times n \\ g = \text{vecteur } n \times 1 \end{array}$$

